This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06642033 6

9841

Adjoint
VEO

~~451-1~~

TRAITÉ

DE LA

COUPE DES PIERRES.

PARIS. — IMPRIMÉ PAR E. THUNOT ET Cᵉ,
Rue Racine, 26, près de l'Odéon.

TRAITÉ

DE LA

COUPE DES PIERRES.

PAR J. ADHÉMAR.

Quatrième Edition,

REVUE ET AUGMENTÉE.

ASTOR LIBRARY NEW-YORK.

NEW YORK PUBLIC LIBRARY

PARIS.

CARILIAN-GŒURY ET Vve DALMONT,
Libraires, quai des Augustins, 49.

BACHELIER, Libraire, quai des Augustins, 55.

MATHIAS, Libraire, quai Malaquais, 15.

HACHETTE ET Cie, Libraires, rue Pierre-Sarrazin, 14.

1853

NEW YORK
PUBLIC
LIBRARY

PRÉFACE.

Le Traité dont je publie aujourd'hui la quatrième édition étant particulièrement destiné aux praticiens, je me suis appliqué surtout à disposer les planches de l'Atlas de la manière la plus convenable pour bien faire comprendre tous les détails des opérations.

L'étendue quelquefois considérable des épures nécessaires à l'exécution des grands travaux ne permet pas toujours d'indiquer suffisamment les relations qui existent entre les points ou les lignes obtenues; mais il n'en est pas de même pour les épures d'étude, et si les premières ne doivent contenir que ce qui est absolument indispensable pour tracer la pierre, les secondes doivent rappeler clairement les principes dont elles sont l'application.

J'ai supposé, dans les éditions précédentes, que le lecteur connaissait la géométrie descriptive. Ce travail préparatoire, loin d'augmenter le temps nécessaire pour bien savoir la coupe des pierres, en facilite au contraire l'étude, en permettant d'établir plus d'analogie dans les idées; et l'on peut affirmer qu'il faut moins de temps pour apprendre la géométrie descriptive et la coupe des pierres, que cette dernière partie toute seule.

Cependant, malgré tous les cours publics qui leur sont destinés, beaucoup d'ouvriers ignorent encore les premiers éléments de la géométrie descriptive, parce que très-peu d'entre eux peuvent assister à ces cours, qui se font souvent dans des locaux trop éloignés des chantiers de construction, et que beaucoup d'autres habitent la province, ou ne restent à Paris que pendant la saison des travaux. Ensuite, les ouvrages de théorie contenant les principes nécessaires à un grand nombre de professions diverses, renferment, par cette raison, beaucoup de choses inutiles à chacune d'elles; et la difficulté de reconnaître ce qui leur est plus particulièrement nécessaire détourne souvent les ouvriers d'une étude dont ils ne comprennent pas suffisamment le but.

Les réflexions qui précèdent expliquent pourquoi j'ai cru devoir introduire dans mon *Traité de Charpente* les principes de géométrie descriptive, sans lesquels les charpentiers ne peuvent pas comprendre les épures des combles à surfaces courbes. Mais cette partie purement théorique, placée ainsi au milieu des applications, a l'inconvénient d'interrompre l'enchaînement des idées, et détourne l'attention du lecteur des études pratiques qui font le sujet principal de cet ouvrage; et pour ne pas retomber ici dans la même faute, je résumerai au commencement du Traité actuel tout ce qui est indispensable pour bien étudier la coupe des pierres, en rappelant que cette introduction peut être passée par les personnes qui savent la géométrie descriptive.

Indépendamment de l'exécution des épures, le lecteur

fera bien de s'exercer à tailler en plâtre les pierres qui lui paraîtraient plus difficiles à concevoir. Ce travail est surtout utile pour reconnaître l'ordre suivant lequel toutes les coupes doivent être tracées; car si l'une de ces coupes était faite avant son tour, la pierre serait perdue, et cette perte serait encore augmentée par celle du temps nécessaire pour recommencer tout le travail précédent.

Pour éviter le soupçon de plagiat, je crois devoir rappeler que *toutes les figures* qui, dans le *Traité de Stéréotomie* publié en 1844 par M. Leroy, sont exactement semblables aux figures correspondantes du Traité actuel, existaient *depuis longtemps* dans les éditions précédentes. Parmi ces épures, il y en a plusieurs qui se rapportent à des problèmes dont la solution m'appartient complétement (1).

Je regrette infiniment que M. Leroy, par un oubli sans doute involontaire, m'ait laissé l'initiative de cette réclamation.

(1) L'appareil des voûtes en descente, figure 137, planche 22.
Les joints de la voûte elliptique, planches 48 et 49.
Les courbes limites de l'arrière-voussure de Marseille, planche 63.
Etc., etc.....

Nota. Les nombres placés en tête et du côté opposé au numéro de chaque page, indiquent la planche. Les numéros des figures sont indiqués dans le texte. Enfin les nombres placés seuls entre parenthèses sont des renvois aux articles.

Le numéro de chaque article est au commencement de l'alinéa.

INTRODUCTION.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

CHAPITRE PREMIER.

Le Point, la Ligne droite et le Plan.

1. **Projections.** Dans la géométrie plane on exprime exactement par des figures les relations de grandeur et de forme qui existent entre les quantités qu'il s'agit de comparer. Ainsi, on peut faire un angle droit ou tracer une circonférence lorsque la solution du problème exige la construction d'une perpendiculaire ou d'un cercle.

Il n'en est plus de même dans la géométrie de l'espace. En effet, lorsque le plan qui contient une figure est placé obliquement par rapport au rayon visuel, toutes les parties de cette figure sont déformées; les angles paraissent plus petits, ou plus grands, suivant leurs positions. Les lignes droites sont plus ou moins raccourcies, par suite de leur éloignement ou de leur direction dans l'espace.

La loi de toutes ces déformations doit être étudiée dans les traités de perspective. Mais dans un grand nombre de questions pratiques, il est nécessaire de conserver les rapports de forme et de position des objets que l'on dessine, et c'est pour atteindre ce but que l'on a imaginé la méthode des *projections*.

2. **Projections du point.** L'espace n'ayant pas de limites, on ne peut déterminer la position d'un point qu'en le rapportant à des limites de convention. Concevons donc (*fig.* 1, *pl.* 1) un plan quelconque X, que, pour mieux fixer les idées, nous supposerons horizontal. Si par le point M nous abaissons la droite M*m* perpendiculaire sur le plan X, le pied *m* de cette perpendiculaire sera la *projection horizontale* du point M, et si l'on conçoit la droite M*m'* perpendiculaire sur le plan Y, que nous supposerons vertical, le point *m'* sera la projection verticale de M.

3. Les deux plans X et Y se nomment *plans de projections*, la droite M*m* est la *verticale projetante* du point M, et la droite M*m'* est *l'horizontale projetante* du même point. La droite AZ est *l'intersection des plans de projections*.

4. La position d'un point ne peut pas être déterminée par une seule de ses projections. En effet, si l'on ne donnait que la projection horizontale *m*, cela indiquerait que le point dont il s'agit appartient à la verticale *m*M. Mais on ne saurait pas s'il est situé au-dessus ou au-dessous du plan X, s'il est près ou loin de ce plan, tandis que si l'on connaît les deux projections *m* et *m'*, *la position du point sera déterminée*, puisqu'il devra se trouver à l'intersection des deux lignes *m*M et *m'*M menées par les points *m* et *m'* perpendiculairement aux plans de projections.

5. **Épure.** Si nous concevons que l'on fasse tourner le plan horizontal X jusqu'à ce qu'il vienne s'appliquer sur le plan vertical Y', le point *m* se placera au-dessous de la ligne AZ, et dans le prolongement de la ligne *m'o*. La figure 3, que l'on obtiendra dans ce cas, sera ce que l'on appelle une *épure*.

Ainsi, une épure est une surface plane sur laquelle on trace toutes les lignes nécessaires à la solution des problèmes qui dépendent de la géométrie descriptive. La partie de l'épure qui

est au-dessus de la ligne AZ, représente le plan vertical de projection, et tout ce qui est au-dessous de la ligne AZ, représente le plan horizontal, qui est censé avoir tourné jusqu'à ce qu'il soit venu s'appliquer sur Y', prolongement du plan Y. Les épures se font ordinairement sur une feuille de papier bien tendue; quelquefois, cependant, on fait les épures sur des murs, sur des planches ou sur la terre. Mais dans tous les cas, *les projections tracées sur une épure doivent être dessinées avec le plus grand soin.*

6. Le plan qui contient les deux droites **Mm**, **Mm'**, fig. 1, est perpendiculaire aux deux plans de projections et par conséquent à leur intersection AZ, de sorte que sur l'épure, fig. 3, la droite *om* doit former le prolongement de *m'o*; d'où il résulte que *les deux projections d'un même point doivent toujours se trouver sur une même droite perpendiculaire à la ligne* AZ. De plus, *la distance* mo *de la projection horizontale du point* m *à la ligne* AZ *exprime la distance du point* M *au plan vertical de projection* Y, *et la perpendiculaire* m'o *exprime la hauteur du même point au-dessus du plan horizontal* X.

7. **Quadrant principal**. Les plans de projection étant *infinis*, partagent l'espace en quatre parties qui sont également *infinies*; mais la plupart des objets que nous aurons à considérer dans les applications, étant limités dans tous les sens, il sera presque toujours possible de les supposer entièrement contenus dans l'un des quatre *angles dièdres* ou *quadrants*, formés par les plans de projection. Cependant il arrivera quelquefois que des lignes d'opérations employées pour la solution du problème, iront se rencontrer derrière le plan vertical ou dessous le plan horizontal de projection. Il est donc nécessaire que nous sachions déterminer la position d'un point situé dans l'un quelconque des angles dièdres formés par les plans X et Y.

Nous appellerons *quadrant principal* toute la partie de l'espace comprise dans l'angle dièdre Y—AZ—X, *fig.* 1; on doit toujours supposer, *fig.* 3, que la partie AZX du plan horizontal est venue se placer au-dessous de la ligne AZ. Par la même raison, le prolongement AZX' du plan horizontal doit venir se placer derrière la partie supérieure du plan vertical. D'où il résulte

que dans une épure, *fig.* 3, tout l'espace qui est au-dessus de la ligne AZ, représente en même temps le plan vertical de projection et le prolongement du plan horizontal, tandis que la partie de l'épure qui est au-dessous de la ligne AZ représente le plan horizontal et le prolongement du plan vertical.

8. D'après cela, concevons, *fig.* 2, un point N qui serait situé au-dessus du plan X et derrière le plan Y, il est évident que sa projection verticale sera n'. Mais, par le rabattement du plan X, la projection horizontale n viendra se placer au-dessus de la ligne AZ, et les deux projections n,n' seront alors dans la partie supérieure de l'épure, *fig.* 3.

9. Si le point U donné *fig.* 4, est situé au-dessous du plan X et devant le plan Y, sa projection horizontale u doit venir se placer au-dessous de la ligne AZ, et les deux projections u,u' sont alors dans la partie inférieure de l'épure, *fig.* 3. Si le point S donné. *fig.* 5, est situé au-dessous du plan X, et derrière le plan Y, la projection horizontale s vient se placer au-dessus de la ligne AZ; tandis que sa projection verticale s' est au-dessous de cette ligne, *fig.* 3. Enfin, il est évident que la ligne AZ contient les projections verticales de tous les points qui appartiennent au plan X, et les projections horizontales de tous ceux qui sont situés dans le plan Y.

10. **Projections de la ligne droite.** Si par une droite M, *fig.* 6, on conçoit un plan P perpendiculaire au plan horizontal de projection X, la droite m, suivant laquelle le plan P rencontre le plan X, sera *la projection horizontale* de la droite M. Le plan P se nomme *plan projetant vertical.* La projection verticale de la droite M sera m', et provient de l'intersection du plan vertical Y par le plan P' qui lui est perpendiculaire et qui contient la droite M. Le plan P' est *le plan projetant perpendiculaire au plan vertical de projection.*

11. Lorsque l'on donne les deux projections m et m' d'une droite, la position de cette ligne est déterminée; car, puisqu'elle doit appartenir en même temps aux deux plans projetants P et P', elle ne peut être que leur intersection M. Sur l'épure *fig.* 8, les droites m et m' sont les deux projections d'une ligne inclinée par rapport aux deux plans X et Y.

12. Toutes les droites devant être considérées comme infinies, il s'ensuit qu'une ligne, inclinée par rapport aux deux plans de projection, aura quelques-uns de ces points au-dessous du plan horizontal et derrière le plan vertical. Mais, les conventions qui précèdent, suffisant pour faire reconnaître la position de chaque point de la ligne donnée, nous n'avons plus qu'à rechercher comment on peut exprimer la *direction* des lignes.

13. Si la droite donnée N, *fig.* 7, est perpendiculaire au plan horizontal de projection, les deux plans P et Y seront perpendiculaires sur le plan X, et la projection verticale *n'* de la droite donnée, sera perpendiculaire sur la ligne AZ (*Géom.*). Il est évident que les verticales projetantes abaissées des différents points de la droite N, se confondent toutes avec cette ligne, dont la projection horizontale se réduira au point *n*, *fig.* 8. Par la même raison, lorsqu'une droite est perpendiculaire au plan vertical de projection, sa projection verticale doit être un point, tandis que sa projection horizontale est une perpendiculaire à la ligne AZ.

14. Lorsque la droite U, donné *fig.* 9, est parallèle au plan horizontal de projection; le plan projetant P' est lui-même horizontal, et la projection verticale *u'*, *fig.* 8, est parallèle à la ligne AZ (*Géom.*). Si la droite donné était parallèle au plan vertical de projection, sa projection horizontale serait parallèle à la ligne AZ. Enfin, si la droite S, donnée *fig.* 10, était parallèle aux deux plans de projection, ses deux plans projetants P et P' seraient eux-mêmes parallèles aux plans de projection et les deux projections *s* et *s'*, *fig.* 8, seraient alors parallèles à la ligne AZ.

15. **Traces des plans.** On sait que la position d'un plan est déterminée :

1° *Lorsqu'on connaît trois points situés dans ce plan, pourvu que ces points ne soient pas en ligne droite.*

2° *Lorsqu'on connaît deux droites parallèles situées dans le plan dont il s'agit.*

3° *Lorsqu'on connaît deux droites quelconques de ce plan.*

On pourra donc déterminer la position d'un plan dans l'espace, en projetant trois quelconques de ses points, ou deux droites parallèles, ou enfin deux droites quelconques situées dans ce plan. On détermine ordinairement la position d'un plan, en projetant

deux droites de ce plan. Et pour plus de simplicité, on choisit de préférence les deux droites, suivant lesquelles ce plan coupe les deux plans de projection. Ces droites se nomment *les traces du plan*.

Ainsi les deux droites *ox* et *oy*, *fig.* 11, sont les traces du plan donné P. Les mêmes droites sont désignées par les mêmes lettres sur la *fig.* 13, qui représente l'épure.

Si le plan donné P', *fig.* 12 et 13 était perpendiculaire au plan horizontal de projection, sa trace verticale *o'y'* serait perpendiculaire à la ligne AZ. Tandis que si le plan donné était perpendiculaire au plan vertical de projection, sa trace horizontale serait perpendiculaire à la ligne AZ.

Quand le plan donné P'', *fig.* 14 et 13, sera parallèle au plan horizontal de projection, sa trace verticale *o''y''* sera parallèle à la ligne AZ, et la trace horizontale n'existera pas, puisque le plan donné ne peut rencontrer nulle part le plan horizontal de projection. Enfin, si le plan donné P''', *fig.* 15 et 13. était parallèle à la ligne AZ, ses deux traces *o'''y'''* *o'''x'''*, seraient parallèles à cette droite.

16 **Théorème.** *Une droite inclinée dans l'espace est en général plus longue que sa projection.* En effet, *fig.* 1, *pl.* 2, si nous représentons le plan de projection par X, il est facile de voir que la droite MN sera plus longue que sa projection *mn*; mais si par le point N, on mène la droite NO, parallèle au plan de projection, et par conséquent égale à la projection de la ligne donnée, on pourra reconnaître qu'en général *une ligne droite* MN, *située comme on voudra dans l'espace, est l'hypoténuse d'un triangle rectangle* MON, *dans lequel un des côtés* NO *de l'angle droit est égal à la projection de la droite, et l'autre côté* MO *est la différence entre les distances* Mm, Nn *des extrémités de cette droite, au plan sur lequel elle a été projetée.* On remarquera cependant que si la droite donnée MN, *fig.* 2, était parallèle au plan de projection X, elle serait alors égale à sa projection sur ce plan, puisque dans ce cas les deux droites MN, *mn*, seraient les côtés opposés d'un rectangle.

Ce que nous venons de dire pour une droite s'applique à une figure plane quelconque. Ainsi le polygone incliné, *fig.* 3, est

plus grand que sa projection ; car, si l'on trace une droite quelconque AC dans le plan du polygone, cette ligne sera plus longue que sa projection. Les seules droites qui dans le polygone seraient égales à leur projection sont les sections que l'on obtiendrait en coupant le polygone par un plan parallèle au plan de projection X.

17. **Théorème.** *Lorsque deux droites sont parallèles, leurs projections sont parallèles.* En effet, *fig.* 4, le plan projetant d'une ligne droite doit contenir cette ligne et toutes les perpendiculaires abaissées de ses différents points sur le plan de projection. On peut donc dire qu'une de ces perpendiculaires, avec la ligne donnée, suffit pour déterminer la position du plan projetant. Donc, *si deux lignes* AB, CD, *sont parallèles dans l'espace, leurs plans projetants* P *et* P' *seront parallèles et les traces* ab, cd, *de ces plans, ou autrement les projections des lignes données seront parallèles.*

18. **Théorème.** *Lorsqu'une ligne droite est perpendiculaire à un plan, les projections de cette ligne sont perpendiculaires sur les traces du plan.* Soit, *fig.* 5, la ligne droite AB perpendiculaire sur le plan P ; représentons le plan de projection par X, et par P' le plan projetant de la droite AB, on aura *ac* pour la projection de cette droite, et *co* sera la trace du plan P. Or le plan P', comme plan projetant, est nécessairement perpendiculaire sur le plan de projection X ; de plus, il est perpendiculaire sur le plan P, puisqu'il contient la droite AB, qui, d'après la question, est perpendiculaire à ce plan. Il résulte de là, que le plan P' étant perpendiculaire en même temps sur le plan P et sur le plan de projection X, sera perpendiculaire à leur intersection *co*, qui n'est autre chose que la trace du plan P ; cette ligne *co* sera donc perpendiculaire au plan P', et par conséquent à toute ligne telle que *ac* qui passerait par son pied dans ce plan : ce qu'il fallait démontrer.

19. **Réciproquement** (*fig.* 10), *si les projections* (ab, a'b') *d'une droite sont perpendiculaires aux traces d'un plan* p, *cette droite sera perpendiculaire au plan* p ; car les deux plans projetants *p'* et *p''* étant perpendiculaires sur les traces du plan *p*, seront tous deux perpendiculaires à ce plan (*Géom.*), et par

conséquent la ligne *ab*, *a'b'*, qui est leur intersection, sera aussi perpendiculaire au plan *p*. *Donc, pour exprimer qu'une droite est perpendiculaire à un plan ou réciproquement, il faut faire en sorte que les deux projections de la droite soient perpendiculaires sur les traces du plan.*

20. **Remarque essentielle.** Afin de ne pas trop multiplier le nombre des planches on a souvent employé la même figure pour la solution de plusieurs problèmes. Cela est sans aucun inconvénient, parce que le lecteur ne doit pas étudier sur les figures du livre; il doit commencer par construire les données sur une planche à dessin et chercher lui-même les points, les lignes ou les plans qui satisfont aux conditions du problème. Chaque épure doit être faite beaucoup plus grande que la figure correspondante du livre.

21. **Notation.** Pour rendre les épures plus faciles à comprendre, on est convenu de tracer en ligne pleine les portions de lignes droites situées au-dessus du plan horizontal, et en deçà du plan vertical, et de tracer en points les portions de ces lignes qui passent derrière ou dessous les plans de projection. On trace aussi en lignes pleines et en noir les données et les résultats de la question; et l'on emploie des points plus ou moins allongés ou de l'encre de couleur pour les lignes nécessaires à la construction de l'épure, en ayant soin surtout de ponctuer toujours de la même manière les deux projections d'une même droite, et de changer la ponctuation de cette ligne lorsqu'elle traverse les plans de projection.

Pour énoncer un point ou une droite, on écrira ses deux projections; ainsi (a,a') exprime le point dont les deux projections sont a et a'. Par la même raison (b,b') serait la droite qui aurait b et b' pour projections. Il est quelquefois utile de désigner la projection d'une droite par deux lettres; $(cd,c'd')$ serait la droite qui a pour ses projections les lignes cd et $c'd'$.

22. **Problème.** *Construire les projections d'une droite passant par un point donné.* Le plan projetant d'une droite contenant toutes les perpendiculaires abaissées des différents points de cette ligne sur le plan de projection, il est évident que la projection de la droite doit contenir la projection de chacun de ses

points. Par conséquent, *pour exprimer qu'une droite située dans l'espace contient un certain point, il suffit de faire passer les projections de la droite par celles du point.* On conçoit que cette question est indéterminée, c'est-à-dire que l'on peut construire une infinité de droites qui passent par un point donné.

23. *Réciproquement*, si l'on voulait exprimer qu'un point est sur une droite, il faudrait placer les projections du point sur celles de la droite, et sur une même perpendiculaire à la ligne AZ. Si l'on voulait *faire passer une droite par deux points*, il est évident, d'après ce qui vient d'être dit, qu'il faudrait faire passer les projections de la droite par les projections des deux points.

24. **Problème.** *Exprimer que deux droites se coupent dans l'espace.* Il suffit pour cela de les faire passer par un même point; dans ce cas, le point de rencontre des projections verticales et l'intersection des projections horizontales doivent être situés sur une même perpendiculaire à la ligne AZ. Dans le cas contraire les droites ne se coupent pas.

Ainsi, les deux droites (b,b') (c,c'), *fig.* 15, ne se rencontrent pas, tandis que les droites (c,c')) (d,d') se coupent au point (n,n').

25. **Problème.** *Trouver les traces d'une droite.* On donne le nom de *traces* aux points suivant lesquels la ligne donnée perce les plans de projection. Soit donc la droite (a,a'), *fig.* 6. Il est évident que le point (v,v') appartient à la droite, puisque ses projections appartiennent à celles de la droite (22); de plus il appartient au plan vertical de projection, puisque sa projection horizontale v est sur la ligne AZ (9). Donc, il est l'intersection de la ligne donnée avec le plan vertical. De même, le point (u,u') étant en même temps dans le plan horizontal et sur la ligne donnée, représente l'intersection de cette ligne avec le plan horizontal.

Il résulte de ce que nous venons de dire, que *pour obtenir les traces d'une droite, il faut prolonger ses projections; puis au point où la projection horizontale rencontrera la ligne* AZ, *on élèvera sur cette dernière ligne une perpendiculaire qui, par son intersection avec la projection verticale de la droite proposée, donnera la trace verticale de cette droite. De même, par le point où la projection verticale rencontrera la ligne* AZ, *on mènera*

une perpendiculaire dont l'intersection avec la projection horizontale de la ligne donnée sera la trace horizontale de cette ligne.

26. **Problème**. *Exprimer qu'un point est situé dans un plan.* Supposons, *fig.* 6, que l'on connaît la projection horizontale *m* d'un point situé dans le plan *p*, on veut déterminer la projection verticale *m'*. On concevra, par le point *m*, une droite parallèle à la trace horizontale du plan *p*, et par conséquent au plan horizontal de projection. Cette droite, dont la projection horizontale est *mc*, rencontrera le plan vertical de projection en un point *c'* situé sur la trace verticale du plan donné *p*. La projection verticale de la droite *mc*, sera donc *c'm'* parallèle à la ligne AZ, et la rencontre de *c'm'* avec la perpendiculaire élevée du point *m*, donnera *m'* pour la projection verticale de ce point.

Pour vérifier l'opération, on construira la droite *m'o'* parallèle à la trace verticale du plan *p*. Cette droite rencontrera le plan horizontal de projection en un point *o*, par lequel on tracera la droite *om* parallèle à la ligne AZ. Et si l'on a bien opéré, la droite *mo* doit contenir le point *m*. En général, pour exprimer qu'un point est situé dans un plan, il faut exprimer que ce point appartient à une ligne *quelconque* du plan, et c'est pour plus de simplicité que nous avons employé de préférence une droite (*mc*,*m'c'*) parallèle à l'un des plans de projection.

27. **Problème**. *Étant données les traces d'un plan et l'une des projections d'une droite de ce plan, trouver l'autre projection de cette même droite.* Soient donnés (*fig.* 6) le plan *p* et la projection verticale *a'* d'une droite située dans ce plan. La droite donnée étant prolongée, s'il est nécessaire, coupera la trace verticale du plan donné en un point *v'*, qui fera partie du plan vertical de projection, et aura, par conséquent, sa projection horizontale *v* sur la ligne AZ. Ensuite, le point, dont la projection verticale se trouve en *u'* sur la ligne AZ, est, par cette raison, nécessairement situé dans le plan horizontal de projection; et comme, de plus, il fait partie du plan donné, puisqu'il est situé sur une droite de ce plan, il sera sur l'intersection du plan horizontal avec le plan donné, c'est-à-dire sur la trace horizontale de ce plan. Donc,

Étant données, la projection verticale *a'* d'une ligne droite,

et les traces du plan qui la contient, *on mènera par les points* v' *et* u' *deux perpendiculaires à la ligne* AZ; *puis joignant le point* v, *où la ligne perpendiculaire menée par le point* v' *rencontre la ligne* AZ, *avec le point* u, *suivant lequel la seconde perpendiculaire rencontre la trace horizontale du plan, on aura la projection horizontale* vu *de la droite*. On ferait une construction analogue, si l'on donnait la projection horizontale de la ligne, et que l'on voulût déterminer sa projection verticale. Enfin, on pourrait vérifier l'opération en construisant (26), par un point de la droite, des parallèles aux traces du plan *p*.

Il résulte de ce qui précède, et il est très-essentiel de remarquer que, *pour exprimer qu'une droite fait partie d'un plan, il faut faire en sorte que les traces* v' *et* u *de la droite soient situées dans le plan*, ou plus généralement *il faut faire les constructions nécessaires pour que deux points quelconques de la droite soient situés dans le plan.*

28. **Problème**. *Étant donnés un plan et un point de ce plan, construire les projections d'une droite qui passe par ce point et qui soit située dans le plan.* On mènera par l'une des projections du point donné *m,m'* (*fig.* 6), et arbitrairement, l'une des projections de la droite demandée; puis l'on déterminera la seconde projection par le moyen que nous venons d'indiquer (27). Le problème admet une infinité de solutions.

29. **Problème** (*Fig.* 7). *Étant données les projections d'un point* (m, m'), *construire les traces d'un plan qui contienne ce point*. On construira d'abord une trace verticale *ps* à volonté, puis, par le point donné *m'*, on fera la droite *m'o'* parallèle à *ps;* la projection horizontale de cette droite sera *mo*, parallèle à la ligne AZ; la perpendiculaire *o'o* déterminera le point *o*, et la droite *so* sera la trace horizontale du plan demandé. Tout plan dont la trace horizontale passera par le point *o*, et dont la trace verticale sera parallèle à *m'o'*, contiendra le plan donné.

En construisant la trace verticale dans une autre direction, on obtiendra encore un nombre infini de plans. Enfin, on pourrait commencer par construire la trace horizontale.

Si l'on veut que le plan demandé soit parallèle à un plan doonné p^{IV}, on commencera par faire la droite *m'o'* parallèle à

la trace verticale du plan p^{IV}. Enfin (*fig.* 11), si l'on veut que le plan demandé p soit perpendiculaire à une droite donnée (a, a'), on fera $m'o'$ perpendiculaire sur la projection verticale a' de la droite donnée, puis so perpendiculaire sur a, enfin sp parallèle à $m'o'$.

30. **Problème.** *Fig.7 Etant données les deux projections* (vu, v'u') *d'une droite, faire passer un plan par cette droite.* On fera passer les traces du plan par les traces v' et u de la droite.

Ce dernier problème admet une infinité de solutions, parmi lesquelles on doit surtout remarquer les deux plans p'' et p'''. Le premier de ces plans est perpendiculaire au plan horizontal, et le second est perpendiculaire au plan vertical de projection. En général, *pour mener par une droite un plan perpendiculaire à l'un des plans de projection, il suffit de prendre pour trace, sur ce plan, la projection même de la droite, et pour l'autre trace, une perpendiculaire à la ligne* AZ. Il est évident (10) que le plan construit de cette manière, sera l'un des plans projetants de la ligne donnée ; ainsi, les deux plans p'' et p''' sont les plans projetants de la ligne $(vu, v'u')$.

La construction précédente peut encore servir pour construire des plans qui satisfont à des conditions données. Ainsi, pour résoudre le problème du numéro 29 on pourra (*fig.* 7) :

1° Tracer par le point donné (m, m') une droite quelconque $(vu, v'u')$;

2° Faire passer les traces du plan demandé par les traces v' et u de la droite $(vu, v'u')$.

Si l'on veut construire (*fig.* 12) un plan p parallèle à une droite donnée $(ab, a'b')$, il suffira de faire passer le plan demandé par une seconde droite $(sk, s'k')$ parallèle à la première (*Géom.*). La question est indéterminée. Si l'on veut que le plan cherché soit perpendiculaire à un autre plan donné, on commencera par construire une droite perpendiculaire au plan donné, et tous les plans qui contiendront cette droite seront perpendiculaires au plan donné (*Géom.*).

31. **Problème.** *Fig.* 8. *Faire passer un plan par deux droites qui se coupent.* On fera passer les traces du plan par les traces des deux lignes données.

32. *Faire passer un plan par trois points donnés.* On joindra ces points deux à deux par des droites, et la construction se fera comme dans le cas précédent.

33. *Faire passer un plan par deux lignes parallèles.* On cherchera encore les traces des deux lignes données, et les droites passant par ces traces seront les traces du plan cherché.

Intersections des plans.

34. **Problème.** (*Fig.* 7). *Deux plans* p et p' *étant donnés par leurs traces, construire leur intersection.* L'intersection de deux plans étant une ligne droite, il suffit de trouver deux points de cette ligne pour qu'elle soit déterminée; or, le point v', intersection des traces verticales, est un point commun aux deux plans donnés, donc il appartient à leur intersection; mais, ce point faisant partie des traces verticales, est nécessairement situé dans le plan vertical de projection; par conséquent sa projection horizontale v sera sur la ligne AZ. Par la même raison, le point u, intersection des traces horizontales, fait partie du plan horizontal de projection : c'est pourquoi sa projection verticale u' sera sur la ligne AZ. Il ne reste plus maintenant qu'à tracer (23) les projections de la droite qui contient les deux points (v, v') et (u, u').

On conclura de ce que nous venons de dire, qu'en général : *Pour obtenir l'intersection de deux plans dont on a les traces, il faut, par le point d'intersection des traces verticales, abaisser une perpendiculaire à la ligne* AZ; *et joignant le pied de cette perpendiculaire avec le point de rencontre des traces horizontales, on aura la projection horizontale de la ligne demandée; puis, du point où les traces horizontales se rencontrent, on abaissera une perpendiculaire sur la ligne* AZ; *et joignant le pied de cette perpendiculaire avec le point de rencontre des traces verticales, on aura la projection verticale de cette même ligne.*

35. **Problème.** *Trouver l'intersection d'une ligne droite avec un plan, fig.* 8. Soient aa', la droite dont on demande l'intersection avec le plan p; on fera passer par la droite un plan

quelconque p', que pour plus de simplicité on prendra perpendiculaire à l'un des plans de projection. Ce plan contenant la droite donnée, contiendra le point cherché; de plus, ce point, d'après la question, doit faire partie du plan donné p; donc il sera sur l'intersection du plan p avec le plan p'; on construira cette intersection $v'u'$ (34), et le point cherché devant être en même temps sur les deux droites (aa') et ($vu,v'u'$), sera au point (m,m') suivant lequel ces deux lignes se coupent. On s'assurera de l'exactitude des constructions, en faisant usage du plan p'' perpendiculaire au plan vertical de projection, ou bien en construisant par le point (m,m') des parallèles aux traces du plan p (26).

36. **Problème.** *Fig.* 15. *Par un point donné* mm' *construire une droite* (md,m'd') *qui rencontre deux autres droites données* (cc', bb'). On construira le plan qui contient le point mm' et la droite bb'; puis on déterminera l'intersection nn' de ce plan avec cc'. La droite ($mn,m'n'$) sera la ligne demandée.

Le plan auxiliaire sera déterminé par la droite bb' et par une seconde droite ($mu,m'u'$) qui joindrait un point quelconque uu' de la droite bb' avec le point donné mm'. On s'assurera que la ligne ($md,m'd'$) rencontre la droite bb' (24).

Il n'est presque jamais facile de construire sur l'épure les traces du plan auxiliaire qui contient le point m et la droite bb'. Dans ce cas, on pourra opérer de la manière suivante On prendra sur la ligne bb' deux points quelconques (uu') (vv'). On joindra ces points avec mm' par les deux droites ($mu,m'u'$) ($mv,m'v'$) qui détermineront le plan auxiliaire. Les deux droites $o'o$, $s's$, perpendiculaires à la ligne AZ, feront connaître les points o et s. Enfin, la droite os qui joint ces deux points sera l'intersection du plan projetant c' avec le plan des deux droites ($mu,m'u'$) ($mv,m'v'$). Cette dernière opération déterminera le point nn', suivant lequel la droite ($md,m'd'$) s'appuie sur la ligne cc' (35).

Le plan auxiliaire qui contient le point mm' et la droite bb', serait déterminé complétement par cette ligne et par l'une des droites ($mu,m'u'$) ($mv,m'v'$). Il semblerait donc que l'une de ces lignes est inutile; mais alors, pour construire os, il faudrait prolonger la droite b' jusqu'à sa rencontre avec le plan projetant c',

ce qui serait souvent impossible, et dans tous les cas, moins commode que la construction précédente, puisque l'on peut toujours choisir les deux points (u,u') et (v,v') de la manière qui convient le mieux à la disposition de l'épure.

Distances.

37. **Problème.** *Trouver la distance de deux points dont on connaît les projections* (mn,m'n'). *Fig.* 9. On pourra construire le triangle rectangle $m'on'''$, dans lequel un coté de l'angle droit est la différence $m'o$ des hauteurs des extrémités de la droite dont les projections sont données, de sorte que, pour achever le triangle, il n'y aura plus qu'à prendre avec le compas la grandeur de la projection horizontale mn; puis après l'avoir portée de o en n''', l'hypoténuse $m'n'''$ sera la longueur demandée (16).

38. On peut encore expliquer, d'une autre manière, la construction précédente. Supposons que la droite donnée tourne autour de la verticale projetante du point mm', en conservant toujours la même inclinaison par rapport à cette ligne. Le point n,n' décrira un arc de cercle horizontal. Cet arc étant parallèle au plan horizontal, aura pour sa projection sur ce plan l'arc nn'', et sa projection verticale $n'n'''$ sera parallèle à la ligne AZ. Or si nous arrêtons le mouvement de la droite ($mn.m'n'$) au moment où sa projection horizontale aura pris la position mn'', la projection verticale correspondante $m'n'''$ sera la longueur cherchée, car la droite étant alors parallèle au plan vertical de projection, il est facile de concevoir qu'elle sera projetée sur ce plan suivant sa grandeur (16).

On aurait pu faire tourner la droite donnée autour de l'horizontale projetante du point m,m', jusqu'à ce qu'elle soit parallèle au plan horizontal. Enfin, on peut aussi concevoir que le trapèze MNmn, *fig.* 1, tourne autour du côté horizontal mn, jusqu'à ce qu'il soit rabattu dans la position $mnm^{IV}n^{IV}$, *fig.* 13 alors $m^{IV}n^{IV}$ sera la ligne elle-même couchée sur le plan horizontal.

Ces opérations, auxquelles on donne le nom de *rabattements*, sont fréquemment employées; on en fait usage pour avoir la

grandeur d'une figure plane. On conçoit, en effet, que pour cela il faut construire cette figure dans ses véritables dimensions; ce qui peut se faire, soit en cherchant les grandeurs de toutes les parties qui la composent, soit en la faisant tourner tout entière, jusqu'à ce qu'elle soit parallèle à l'un des plans de projection; car il est évident que si on la projette de nouveau dans cette position, elle sera égale à sa projection. Nous reviendrons plus tard sur ce sujet.

39. **Problème**. *Déterminer la distance d'un point à un plan.* Étant donnés, par exemple (*fig.* 5), le plan P et le point A.

1re *opération.* On tracera par le point A une droite AB perpendiculaire au plan P.

2e *opération.* On déterminera le point B suivant lequel la perpendiculaire AB perce le plan P.

3e *opération.* On cherchera la longueur de la *portion* AB de perpendiculaire comprise entre le point donné et le plan.

La question étant ainsi décomposée, on commencera l'épure en exécutant successivement chacune des *trois* opérations précédentes, dans l'ordre suivant lequel nous venons de les indiquer. Ainsi, *fig.* 10, étant donnés le plan p et le point a,a'.

1re *méthode.* 1° On tracera par les points a et a' les deux droites $ab,a'b'$ respectivement perpendiculaires sur les traces du plan p. Ces deux lignes seront les projections de la droite perpendiculaire sur le plan p. 2° On déterminera (35) le point b,b' suivant lequel la droite $ab,a'b'$ perce le plan p; de sorte que $ab,a'b'$ seront les deux projections de la portion de perpendiculaire comprise entre le point (a,a') et le plan p. 3° On fera tourner la droite $ab,a'b'$ autour de la verticale projetante du point aa' (38); ce qui donnera $a'b''$ pour la distance du point aa' au plan p.

40. 2e *méthode.* On construira d'abord le plan vertical p' perpendiculaire sur la trace horizontale du plan p, et par conséquent perpendiculaire à ce plan (*Géom.*). Le plan p' contiendra la perpendiculaire abaissée du plan aa' sur le plan p. On fera tourner le plan p' autour de sa trace verticale, jusqu'à ce qu'il soit rabattu sur le plan vertical de projection. Dans ce mouvement, le point aa' viendra se placer en a'', et le point s en s''', après avoir décrit deux arcs horizontaux dont les centres ont le point o pour

projection horizontale commune. On tracera la ligne $v's'''$, intersection du plan donné p par le plan auxiliaire p'; et la droite $a'''b'''$, perpendiculaire sur $v's'''$, sera la distance du point aa' au plan p. En effet, les deux plans p et p' étant perpendiculaires entre eux, la droite $a'''b'''$, située dans le plan p' et perpendiculaire à l'intersection $v's'''$ est aussi perpendiculaire au plan p, et mesure par conséquent la distance de ce plan au point donné aa'.

Si on voulait avoir la projection verticale de la perpendiculaire, on ramènerait cette ligne dans le plan p, ce qui donnerait $a'b'$ perpendiculaire sur la trace verticale du plan p. Il est évident qu'au lieu d'un plan vertical p', on aurait pu employer le plan p'' perpendiculaire à la trace verticale du plan donné. Dans ce cas on rabattrait ce plan sur le plan horizontal.

41. **Problème.** *Déterminer la distance de deux plans parallèles.* On choisira un point dans l'un des deux plans donnés, puis on cherchera la distance de ce point au second plan (39).

On peut encore opérer de la manière suivante. On construira une droite perpendiculaire aux deux plans donnés (19). On déterminera les points suivant lesquels cette droite perce les deux plans (35) et l'on cherchera ensuite la distance de ces deux points.

42. **Problème.** (*Fig.* 11.) *Mesurer la distance d'un point* (m,m') *à une droite donnée* (a,a') : 1° On mènera par le point m,m' un plan p perpendiculaire sur la droite a,a' (19); 2° on déterminera (35) l'intersection de la droite aa' avec le plan p, ce qui donnera en nn' le pied de la perpendiculaire abaissée du point mm' sur la droite aa'; 3° joignant ce point avec le point donné, on aura cette perpendiculaire ($mn,m'n'$); 4° il n'y aura plus qu'à en chercher la grandeur $n'm'''$ (38).

43. **Problème.** *Mesurer la distance de deux droites parallèles.* On choisira un point quelconque sur la première droite (23). Puis on cherchera la distance de ce point à la droite donnée (42).

2° *Méthode.* On peut encore opérer de la manière suivante :

1° On construira un plan perpendiculaire sur les droites données (19).

2° On déterminera les points suivant lesquels ce plan coupe

les deux droites (35), puis on cherchera la distance de ces deux points.

44. **Problème.** *Mesurer la distance de deux droites quelconques.* Pour plus de clarté, on fera bien, avant de faire l'épure, de représenter par un croquis en perspective toutes les opérations indiquées ci-dessous. Exprimons les droites données dans l'espace par AB et CD : 1° on prendra sur CD un point quelconque H ; 2° on mènera par le point H une ligne KS parallèle à la droite AB ; 3° par les deux lignes CD et KS on construira un plan P (31). Ce plan sera parallèle à la droite AB ; 4° on prendra ensuite sur la droite AB un point quelconque M ; 5° on abaissera de ce point une ligne MN perpendiculaire au plan P (19) ; 6° on déterminera en N le pied de cette perpendiculaire (35) ; 7° on fera mouvoir la droite MN parallèlement à elle-même jusqu'à ce que le point N soit arrivé en O sur CD, puis on tracera la droite OI parallèle à NM. La droite OI sera perpendiculaire sur les deux droites données. En effet, OI étant parallèle à MN, sera, comme cette dernière ligne, perpendiculaire au plan P, et par conséquent à la droite CD qui passe par son pied dans ce plan ; par la même raison, elle sera perpendiculaire à la droite NO et par conséquent à AB qui est parallèle à NO. 8° Quand on aura obtenu la ligne OI perpendiculaire sur les deux droites données, il ne restera plus qu'à en chercher la grandeur (37).

L'épure (*fig.* 12) représente les constructions que nous venons d'indiquer. Pour obtenir le résultat, il suffit d'exécuter ces constructions dans l'ordre suivant lequel on vient de les énoncer, en faisant pour cela usage des principes établis précédemment.

Rabattements.

45. **Définition.** Nous avons dit (au n° 38) que, pour avoir la grandeur véritable de la portion de ligne droite qui joint deux points, il fallait faire tourner cette ligne jusqu'à ce qu'elle soit parallèle à l'un des plans de projection. Cette opération, que

l'on nomme *rabattement*, a servi dans la solution de plusieurs questions précédentes.

La droite immobile autour de laquelle on fait ainsi tourner le plan que l'on rabat se nomme *axe* ou *charnière* de rabattement. *Elle doit toujours être parallèle à l'un des plans de projection*; car si on faisait tourner une figure plane autour d'une droite qui ne satisferait pas à la condition que nous venons d'énoncer, la figure que l'on ferait tourner, ne pouvant *jamais* être parallèle au plan de projection, ne se projetterait jamais sur ce plan dans sa véritable grandeur.

Lorsque l'on fait un rabattement, chaque point décrit dans l'espace un cercle qui a son centre sur l'axe de rotation, et qui a pour rayon la distance de cet axe au point que l'on rabat. Les notions précédentes étant admises, nous allons compléter cette théorie par quelques exemples.

46. Supposons que l'on veuille rabattre le point m,m', *fig.* 13, sur le plan horizontal qui contient la droite $ab,a'b'$ et que l'on ait choisi cette droite pour l'axe du rabattement. Le point mm' ne quittera pas le plan vertical qui a pour trace horizontale la droite mm^{IV} perpendiculaire sur ab; et pour connaître la place que le point mm' doit venir occuper sur le plan horizontal qui contient la droite ab, $a'b'$, il suffit de chercher la véritable grandeur de la droite mo, $m'o'$, qui n'est autre chose que le rayon de l'arc de cercle parcouru par le point mm', dans son mouvement.

Pour obtenir la grandeur de la droite (mo, $m'o'$), il faudra opérer comme nous l'avons dit au n° 38; c'est-à-dire que l'on fera tourner cette ligne autour de l'horizontale projetante du point oo'. Le point mm' décrit alors un arc de cercle $m'm''$ parallèle au plan vertical de projection, et qui, par cette raison, doit avoir sa projection horizontale mm''' parallèle à la ligne AZ. Par suite de cette opération, on aura $m'''o$ pour la véritable grandeur de la droite (mo,$m'o'$), et par conséquent pour la distance du point mm' à la droite ab,$a'b'$; de sorte qu'en ramenant $m'''o$ dans la position $m^{\text{IV}}o$, le point m^{IV} sera la place occupée par le point mm' rabattu en tournant autour de ab, sur le plan horizontal qui contient cette droite.

Il est très-essentiel de remarquer que, dans l'opération précédente, il y a deux rabattements. L'un, qui se fait autour de *ab*, a pour but de rabattre le point *mm'* sur le plan horizontal *a'b'*. Le second, qui a lieu autour de l'horizontale projetante du point *o*, sert à déterminer la distance du point *mm'* à la droite *ab*, que l'on a prise pour axe du rabattement.

L'opération serait bien plus simple, si la droite que l'on prend pour axe du rabattement était perpendiculaire à l'un des plans de projection, comme on peut le voir par la solution du n° 38. Nous conclurons de ce qui précède :

1° Que les conditions essentielles pour qu'une droite puisse servir d'axe de rabattement, c'est qu'elle soit *parallèle à l'un des plans de projection.*

2° Que les constructions seront encore plus simples lorsque l'axe du rabattement sera *perpendiculaire au plan de projection.*

Or, dans un plan incliné quelconque, on pourra toujours obtenir un nombre infini de droites parallèles à tel plan de projection que l'on voudra; mais on ne pourra obtenir de perpendiculaires au plan de projection que dans les plans qui satisferaient eux-mêmes à cette condition.

47. **Problème**. *Déterminer la distance d'un point à une droite.* Cette question, que nous avons déjà vue au n° 42, peut être résolue par un rabattement. Voici l'ordre qu'il faudra suivre :

1re *opération. Fig.* 14. Par le point donné (*a*,*a'*), concevons le plan horizontal *p*. L'intersection de ce plan par la droite donnée *bb'* sera un point *nn'* que l'on projettera en *n* sur le plan horizontal.

2e *opération.* La ligne droite *an*,*a'n'* sera une horizontale située dans le plan qui contient le point et la droite donnée.

3e *opération.* Nous ferons tourner la droite *bn*,*b'n'* autour de l'horizontale *an*,*a'n'*, jusqu'à ce qu'elle soit ramenée dans le plan horizontal *p*. Dans ce mouvement, le point *nn'* ne changera pas de place, puisqu'il appartient à la droite *an*,*a'n'*, que nous prenons pour axe de rabattement. Mais si nous prenons, sur la droite donnée, un point quelconque *mm'*, il est évident que ce point, en tournant autour de *an*, ne quittera pas le plan vertical qui aurait pour trace la droite *mm*iv perpendiculaire sur *an*. De

sorte qu'en cherchant, comme nous l'avons fait au n° 203, la distance om''' du point mm' à la droite $an,a'n'$, nous obtiendrons m^{IV} pour la place occupée par le point mm' rabattu sur le plan p. Il ne restera donc plus qu'à tracer la droite nm^{IV} et la perpendiculaire au'', qui sera la distance demandée.

Si l'on veut avoir les deux projections de la perpendiculaire au'', on supposera que la droite nm^{IV} revient à la place qu'elle occupait primitivement dans l'espace, et l'on obtiendra (u,u') pour les deux projections du point suivant lequel la droite donnée est rencontrée par la perpendiculaire abaissée du point mm'.

Angles des lignes.

48. **Problème.** *Étant données* (fig. 1, pl. 3) *les projections de deux droites* (a,a') (b,b'), *on demande de construire l'angle que ces deux droites font entre elles.* On cherchera d'abord les points (cc',dd') suivant lesquelles les droites données vont percer un plan horizontal quelconque p; puis, prenant la droite cd pour axe, on fera tourner le plan des deux droites données autour de cette ligne, jusqu'à ce qu'il soit rabattu sur le plan p. Dans ce mouvement, le sommet de l'angle que les droites font entre elles décrira un cercle dont le centre sera placé en oo' sur l'axe du rabattement. Le plan de ce cercle étant vertical, il aura pour projection horizontale la droite oss''', et pour rayon la véritable grandeur de la droite so, $s'o'$. On cherchera (46) cette longueur représentée sur l'épure par la ligne os'', et on la portera de o en s'''; ce qui donnera la position que le sommet de l'angle viendra prendre sur le plan p. Enfin, si on joint le point s''' avec c et d, on aura l'angle demandé $cs'''d$ rabattu sur le plan horizontal p. La construction précédente nous a donné l'angle aigu que les deux droites font entre elles; si l'on voulait avoir l'angle obtus, il suffirait de prolonger un des côtés de l'angle obtenu. On pourrait, si cela était plus commode, prendre pour axe de rabattement une ligne parallèle au plan vertical de projection.

49. Sur la figure 2, l'un des côtés de l'angle cherché est ver-

tical. Prenant ce côté *aa'* pour axe, on a fait tourner le plan des deux droites jusqu'à ce qu'il soit arrivé dans la position *au''*. Alors il se trouve projeté en *a's'u'''*, selon sa véritable grandeur. Si l'on voulait que l'angle donné fût partagé en deux parties égales, on construirait la droite *s'v'''* qui partage l'angle rabattu *a's'u'''* en parties égales, et l'on ramènerait ensuite le tout à sa place, ce qui donnerait *s'v'* pour la projection verticale de la droite demandée. Enfin, *fig.* 3. Si l'on veut partager en trois parties égales un angle dont les projections seraient *csd*,*c's'd'*, on commencera par le rabattre, ce qui donnera *cs'''d*, puis on partagera ce dernier angle par les droites *s'''*—1, *s'''*—2 que l'on ramènera ensuite à leur place.

Angles des lignes et des plans.

50. **Problème.** *Construire l'angle qu'une droite fait avec un plan.* On sait (*Géom.*) que l'angle d'une droite avec un plan se mesure par l'angle que cette droite fait avec sa projection sur ce plan. Mais pour éviter la construction de cette dernière ligne, on remarquera que l'angle demandé est le complément de l'angle que la ligne donnée ferait avec la perpendiculaire au plan donné, d'où résulte la construction qui suit : 1° on prendra (*fig.* 4) sur la droite donnée (*ac*,*a'c'*) un point quelconque (*aa'*) ; 2° on abaissera de ce point, la ligne (*ab*,*a'b'*) perpendiculaire au plan donné *p*; 3° on rabattra l'angle *c'a''b'* que ces droites font entre elles ; 4° on en prendra le complément *c'a'''u*.

51. **Problème.** (*Fig.* 5). *Construire les angles qu'une droite* (ac,a'c') *fait avec les plans de projection.* Pour avoir l'angle avec le plan horizontal : 1° On prendra sur la droite donnée un point quelconque (*aa'*) ; 2° on tracera la droite *a'b* perpendiculaire au plan horizontal de projection ; 3° on rabattra l'angle *ba'c''*, formé par les deux droites (*ac*,*a'c'*) (*ab*, *a'b'*) ; 4° l'angle *a'c''b*, complément de *ba'c''*, mesurera l'inclinaison de la droite donnée (*ac*,*a'c'*) sur le plan horizontal de projection.

Si 'on veut avoir l'angle que la même droite fait avec le

plan vertical de projection on opérera de la manière suivante : 1° Par un point quelconque cc', appartenant à la droite donnée, on fera passer la droite (cd, $c'd'$) perpendiculaire au plan vertical de projection. 2° On rabattra l'angle dca'' formé par les deux droites (ca,$c'a'$) (cd,$c'd'$). 3° L'angle $ca''d$, complément de dca'', sera l'angle demandé.

52. **Problème.** *Construire l'angle que deux plans font entre eux.* On sait (*Géom.*) que pour avoir l'angle de deux plans il faut mesurer l'angle que font entre elles deux droites menées dans ces plans, perpendiculairement par un même point de leur intersection.

1re *Méthode.* Soient (*fig.* 6) les deux plans p et p'; on construira (34) la projection horizontale vu de l'intersection de ces deux plans, puis on mènera perpendiculairement à cette ligne, une droite p'' qui représentera la trace horizontale du plan dans lequel se trouve l'angle que l'on cherche. Si l'on fait tourner ce plan autour de sa trace p'' pour le rabattre sur le plan horizontal, le sommet de l'angle demandé se meut dans le plan vertical $v'vu$, et ne peut, par conséquent, se rabattre que sur la ligne vu. Il ne reste donc plus qu'à connaître sa distance à la ligne p'' que l'on prend ici pour axe du rabattement : pour cela, faisons tourner le plan $v'vu$, autour de sa trace verticale vv'. L'intersection des deux plans donnés viendra prendre, sur le plan vertical, la position $v'u'$; le point o, qui représente le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle demandé sur la ligne p'' se rabattra en o'; abaissant du point o' une perpendiculaire sur $v'u'$, cette perpendiculaire $o's'$ sera la distance du sommet de l'angle cherché à la ligne p''; de sorte qu'en portant cette longueur $o's'$ de o en s, on aura aso pour l'angle demandé rabattu sur le plan horizontal de projection.

Par cette construction, on aura évité de construire la projection de l'angle cherché dont on ne demandait que la véritable grandeur.

On peut rabattre le plan vertical $v'vu$ sur le plan horizontal (*fig.* 7). Dans ce cas, l'intersection des deux plans serait représentée par $v''u$, et le sommet de l'angle cherché par s''. On pourrait encore, si cela était plus commode, faire sur le plan ver-

tical toutes les constructions que nous avons faites sur le plan horizontal.

53. 2e *méthode*. On sait (*Géom.*) que deux plans étant donnés, si d'un point pris où l'on voudra dans l'espace, on abaisse des perpendiculaires sur ces plans, l'angle que ces perpendiculaires feront entre elles sera le même que l'angle des deux plans. D'après cela, étant donnés les deux plans p et p' (*fig.* 6 ou 7), on prendra (*fig.* 8), un point quelconque ss', et après avoir mené par ce point des droites ($sa,s'a'$) ($sc,s'c'$) perpendiculaires aux deux plans donnés p et p' (19), on cherchera (48) l'angle que ces deux droites feront entre elles.

54. **Problème**. *Construire l'angle d'un plan donné avec les plans de projection*. L'angle que le plan p (*fig.* 10) fait avec le plan horizontal, étant situé dans le plan vertical p', on fera tourner ce plan autour de sa trace verticale jusqu'à ce que le point s, sommet de l'angle cherché, soit venu se placer en s' sur la ligne AZ; ce qui donnera l'angle $os'a$ pour l'inclinaison du plan p sur le point horizontal. De même, l'angle que le plan donné fait avec le plan vertical étant situé dans le plan p'', son sommet u se rabattra en u', et l'angle $ou'c$ représentera l'inclinaison du plan p sur le plan vertical de projection.

55. **Problème**. *Construire un plan passant par l'intersection de deux plans donnés, et qui partage l'angle qu'ils font entre eux en parties égales*. (*Fig.* 9). Le plan demandé devant contenir la ligne (vu) qui représente l'intersection des deux plans donnés, sa trace horizontale doit passer par le point u, et sa trace verticale par v' (27). Il ne reste donc plus qu'à trouver un second point de l'une de ses traces : pour cela, on rabattra sur le plan horizontal l'angle asc que les deux plans donnés font entre eux, et l'on construira la droite sn qui partage cet angle en deux parties égales. Le point n suivant lequel cette droite perce le plan horizontal appartiendra à la trace horizontale du plan cherché. Après avoir construit cette trace un, on fera passer la trace verticale par le point v', et l'on aura satisfait à la question. En effet, les trois droites sa,sn,sc, étant situées dans le plan p'' perpendiculaire à l'intersection commune des trois plans p,p',p''', les angles que ces lignes font entre elles mesurent les inclinaisons

de ces trois plans (*Géom.*), et puisque *sn* partage l'angle *sac* en deux parties égales, le plan p''', qui contient *sn*, partagera l'angle des deux autres plans aussi en parties égales. Il est bon de remarquer que l'on n'a pas ramené la ligne *sn* à sa place, parce qu'il suffisait d'avoir le point où cette ligne perce le point horizontal.

Nous avons partagé en deux parties l'angle aigu formé par les deux plans donnés; on opérerait de la même manière pour obtenir le plan qui partage l'angle obtus en deux parties égales. Enfin, les mêmes moyens seraient employés si l'on voulait partager l'angle de deux plans suivant tout autre rapport. Sur la figure 10, le plan p'' partage en deux parties égales l'angle que le plan *p* fait avec le plan horizontal de projection.

Angle trièdre.

56. **Problème.** Il existe entre les faces et les angles plans d'un angle trièdre des relations telles, que si l'on connaît trois quelconques de ces quantités, on peut toujours trouver les trois autres. Cette question donne lieu à six problèmes. En effet, désignons par *a*,*b*,*c* les trois angles plans ou faces, et par A,B,C les angles dièdres ou d'inclinaison des faces entre elles. On peut avoir :

	DONNÉES.	INCONNUES.
1°	*a*, *b*, *c*,	A, B, C,
2°	*a*, *b*, C,	*c*, A, B,
3°	*a*, A, C,	*b*, *c*, B,
4°	A, B, C,	*a*, *b*, *c*,
5°	A, B, *c*,	C, *a*, *b*,
6°	A, *a*, *c*.	B, C, *b*.

57. 1er **Problème.** *Étant donnés* a,b,c, trouver A,B,C. On placera les trois faces données à côté les unes des autres, comme on le voit (*fig.* 11), et l'on prendra une distance quelconque $sm'=sm''$, que l'on portera à droite et à gauche du point s, sur les deux côtés extérieurs des faces a et c.

Si maintenant, on fait tourner la face a autour de l'arête sv, pour la ramener à la position qu'elle doit occuper dans l'espace, le point m' décrira un cercle dont le plan sera perpendiculaire à l'arête sv, et dont la projection sur le plan de la face b sera représentée par la droite $m'm$; si l'on fait tourner pareillement la face c autour de l'arête su, le point m'' décrira un cercle qui aura pour projection la droite $m''m$. Or, quand les deux faces a et c seront revenues à leur place, le point m' et le point m'', qui sont à égale distance du point s, ne feront qu'un seul et même point, et ce point devant être en même temps dans les deux plans $m'm,m''m$, fera partie de leur intersection, qui, étant perpendiculaire au plan de la face b, se projettera sur cette face par le point m.

L'angle trièdre étant reformé, l'angle C, qui exprime l'inclinaison des faces a et b, aura son sommet en h, et sera projeté sur le plan de la face b par la ligne hm qui sera l'un de ses côtés. Pour avoir la grandeur de cet angle, il suffira de le faire tourner autour de hm pour le rabattre sur le plan de la face b, dans la position mhm'''. La perpendiculaire qui contient le point m prendra, dans ce rabattement, la position mm'''; on déterminera le point m''' en décrivant du point h, comme centre, un cercle dont le rayon hm''', égal à la ligne hm', sera le second côté de l'angle C. Une construction analogue donnera l'angle A rabattu sur le même plan, dans la position mkm^{IV}.

Pour obtenir l'angle B, on concevra par le point dont la projection est m, un plan perpendiculaire à l'arête sm. Ce plan, qui contiendra l'angle B, coupera la face a suivant une droite perpendiculaire à sm, et représentée par $m'v$ dans le rabattement de la face A; ce même plan coupera la face c, suivant la ligne $m''u$, perpendiculaire sur sm'', et la face b suivant vu; de sorte que les trois droites $m'v,vu,m''u$, seront les trois côtés du

triangle au sommet duquel se trouve l'angle B, que l'on connaîtra en construisant le triangle *vuz*.

58. Si la face *b* était égale à la somme des deux autres, le point *m* serait sur l'arc de cercle *m'om''*, les angles A et C seraient nuls et l'angle B vaudrait deux angles droits. Si la face *b* était plus grande que la somme des faces *a* et *c*, le point *m* se trouverait hors du cercle *m'om''*, et l'on aurait $mh > m'h$; ce qui serait absurde, puisque l'angle trièdre étant reformé, *mh* est la projection de *m'h*; enfin, s'il y avait dans les données quelque condition d'impossibilité, elle se manifesterait toujours par la construction de l'épure. J'engage le lecteur à changer les données de manière à reconnaître ce qui arriverait dans toutes les hypothèses. Il fera bien aussi de résoudre la même question en supposant que quelques-uns des angles donnés ou tous les trois sont obtus.

59. Si du point *m*, comme centre, avec un rayon égal à mm''', on décrit un arc de cercle, cet arc doit passer par le point m^{iv}; car il résulte de ce qui précède, que les deux droites mm''' et mm^{iv} représentant le rabattement de la même ligne. Enfin, les deux angles *shm*, *skm* étant droits, leurs sommets doivent se trouver sur la circonférence qui aurait *sm* pour diamètre.

60. 2e **Problème.** *Étant donnés* a,b,C, *trouver* c,A,B, on placera d'abord les deux angles *a*,*b*, à côté l'un de l'autre (*fig.* 11), et l'on prendra le point *m'* à volonté. La perpendiculaire abaissée du point *m'* sur l'arête *sv*, donnera en *h* le sommet de l'angle C, et comme la valeur de cet angle est donnée par la question; que, de plus, on sait que hm''' doit être égal à hm', on pourra construire le triangle rectangle mhm'''; ce qui déterminera le point *m*. On abaissera de ce point la ligne mm'' perpendiculaire sur l'arête *su*, et décrivant l'arc *m'om''*, on aura le point m'', et la face *c* sera connue. Les angles A et B s'obtiendront comme dans le problème précédent, qui ne diffère de celui-ci que par l'ordre des opérations.

61. 3e **Problème.** *Étant donnés* a,A,C, *trouver* b,c,B. On construira d'abord l'angle *a* (*fig.* 13), et l'on prendra le point *m'* à volonté. La perpendiculaire abaissée de ce point sur l'arête *sv* donnera en *h* le sommet de l'angle C. On construira le triangle

rectangle mhm''', dont on connaît l'angle aigu C, donné par la question et l'hypoténuse hm''' égale à hm'; le point m sera connu. Pour obtenir le point k', qui appartient à l'arête su, on se rappellera (60) que ce point doit être situé sur la circonférence d'un cercle qui aurait sm pour diamètre. Décrivant cette circonférence, il n'y aura plus qu'à trouver la distance du point k' au point m; ce qui sera facile, puisque cette distance est un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle, dans lequel on connaît un angle aigu A, donné par la question, et le côté opposé mm^{IV} égal à mm''' (*fig.* 11). Construisant donc ce triangle mkm''' (*fig.* 13), il n'y aura plus qu'à ramener le point k en k' sur la circonférence $shmk'$, et la face b sera connue. En opérant comme dans l'épure précédente, on obtiendra c et B.

62. Si au lieu de ramener le point k en k' à droite du point m, on l'avait ramené à gauche en k'', on aurait encore satisfait aux conditions demandées; au lieu de la face b on aurait obtenu l'angle vsu', la face c serait remplacée par $u'sm^{V}$, et l'angle B par vzu'; les faces c et $u'sm^{V}$ seraient égales dans les deux solutions et ne différeraient que par leur position dans l'espace; il faut cependant remarquer que dans ce cas, l'angle donné A serait à l'extérieur du trièdre au lieu d'être tourné vers l'intérieur comme dans les exemples qui précèdent.

Ces trois problèmes suffisent pour le but que nous nous proposons ici. On trouvera la solution des trois derniers dans le volume qui contient les exercices et questions diverses.

63. **Problème.** On peut désirer connaître l'angle que l'une des arêtes fait avec la face opposée. Supposons, par exemple, que l'on veuille obtenir (*fig.* 12) l'angle $m^{VI}sm$ que l'intersection des faces a et c fait avec la face b. On rabattra cet angle autour de la droite sm, en remarquant qu'il appartient à un triangle rectangle ayant pour l'un des côtés de l'angle droit la droite sm, et pour second côté de l'angle droit, la droite $mm^{VI}=mm'''$ (*fig.* 11). On obtiendrait de la même manière les angles que les autres arêtes font avec les faces opposées.

CHAPITRE II.

Surfaces des corps et courbes de section.

64. On sait que les polyèdres sont des corps terminés par des faces planes. Il résulte de là, que les dimensions d'un polyèdre seront parfaitement connues, dès que l'on connaîtra la position de ses sommets; car la position des sommets déterminera celle des arêtes, et les arêtes détermineront les faces. Par conséquent, *pour projeter un polyèdre, il suffira de projeter ses sommets.* Supposons qu'il s'agisse d'un tétraèdre placé d'une manière quelconque dans l'espace. On déterminera (*fig.* 1, *pl.* 4) les projections horizontales et verticales des quatre sommets, et les droites qui joindront ces points, deux à deux, seront les projections des six arêtes du solide.

Pour rendre plus facile à concevoir les projections des corps solides, on est convenu que l'on regarderait certaines lignes comme *vues*, et d'autres comme étant *cachées*, et que pour les distinguer on tracerait entièrement les lignes vues, tandis que l'on ponctuerait les lignes cachées. Pour cela on suppose, lorsqu'on regarde la projection horizontale d'un corps, que l'œil est placé au-dessus de ce corps à une distance infiniment grande, et lorsqu'on regarde la projection verticale, on est censé être placé devant le plan vertical de projection, et infiniment loin de ce plan.

Cette convention une fois adoptée, nous dirons qu'une ligne est vue, lorsqu'un point quelconque partant de cette ligne peut s'éloigner infiniment du plan de projection, en suivant une perpendiculaire à ce plan, sans rencontrer la masse d'aucun corps solide, et dans le cas contraire la ligne est cachée. Ainsi, par exemple, les deux lignes (1—3,1'—3') (2—4,2'—4') (*fig.* 1) étant deux arêtes d'un même polyèdre, la première serait cachée sur

la projection verticale. En effet, si l'on trace l'horizontale projetante du point *m*, il est évident qu'elle coupera les deux droites dont il s'agit, aux points *m'*,*m''*. Or, le dernier de ces deux points appartenant à la droite (2—4,2'—4'), on en conclut que cette ligne passe devant la droite (1—3,1'—3'), que, par conséquent, cette dernière ligne doit être tracée en points sur la projection verticale. Par un raisonnement analogue, on reconnaîtrait que la projection horizontale de la ligne (3—4,3'—4') doit être ponctuée.

65. Lorsqu'on veut décrire un objet qui n'existe encore que dans l'imagination, et dont les projections sont destinées à diriger le travail des ouvriers, on doit prévoir le moment où il faudra obtenir, d'après le dessin, les véritables grandeurs des diverses parties de ce corps pour les transporter sur la matière dont il doit être composé ; il faut donc choisir le système de plans de projection le plus propre à atteindre ce but. Ainsi, par exemple, s'il s'agit d'un prisme, on placera (*fig.* 2) une de ses bases *abcde* dans le plan horizontal, et l'on prendra pour second plan de projection un plan vertical parallèle aux arêtes ; puis, après avoir construit la projection horizontale de la base supérieure, on élèvera, par chacun des sommets de cette projection, des perpendiculaires jusqu'à ce qu'elles rencontrent le plan horizontal *mn*, dont la position est déterminée par la hauteur que l'on veut donner au prisme que l'on projette. On voit qu'au moyen de la précaution que l'on a prise de placer le prisme parallèle au plan vertical de projection, toutes les arêtes de ce corps seront projetées sur l'un ou l'autre plan de projection dans leur véritable grandeur.

66. Il est encore plus simple, lorsque cela peut s'accorder avec la nature de la question, de placer le prisme que l'on projette dans une position perpendiculaire à l'un des plans de projection. C'est ce que l'on a fait (*fig.* 5) pour le cylindre circulaire, que l'on peut considérer comme un prisme droit dont le nombre des faces serait infini. La figure 3 contient les deux projections d'un cône circulaire. Enfin, lorsqu'on veut projeter une surface de révolution (*fig.* 6), on choisit ordinairement un des plans de projection perpendiculaire à l'axe de la surface

donnée. La seconde projection de cette surface est alors une section méridienne que l'on nomme méridien principal, parce que son plan *pq* est parallèle au second plan de projections. La courbe *abcd* est la *section méridienne principale.*

Sections.

67. **Problème.** *Construire la section d'un polyèdre par un plan.* La figure demandée se compose évidemment de toutes les lignes suivant lesquelles le plan donné coupe les différentes faces du polyèdre. On pourrait donc chercher les traces de toutes ces faces, et la question reviendrait alors à faire, plusieurs fois, les opérations que nous avons indiquées au n° 34, pour construire l'intersection de deux plans; mais au lieu de chercher les intersections du plan donné avec les faces, il est presque toujours plus simple de déterminer les points suivant lesquels le plan coupant rencontre les arêtes du solide. Pour faciliter la recherche de ces points, on prend ordinairement un plan de projection perpendiculaire au plan donné, qui devient alors le plan projetant de la ligne de section. L'une des projections de cette ligne se réduit, par conséquent, à une droite qui se confond avec la trace du plan coupant, de sorte qu'il ne reste plus qu'à déterminer la seconde projection de la figure demandée.

68. Supposons, par exemple, que l'on veut obtenir la section du tétraèdre projeté (*fig.* 1) par un plan *c'p*, perpendiculaire au plan vertical de projection. On abaissera des perpendiculaires à la ligne AZ, par les points v', o', u', z', suivant lesquels le plan *p* coupe les arêtes du polyèdre donné: on obtiendra, par ce moyen, les sommets du quadrilatère *vozu* qui est la projection horizontale de la section. Si l'on veut obtenir cette figure dans sa véritable grandeur, on la fera tourner autour d'une droite telle que (c,c') perpendiculaire au plan vertical de projection et située dans le plan *p*. Lorsque ce plan sera dans la position horizontale $c'p'$, on aura le quadrilatère $v''o''z''u''$ pour la section rabattue dans sa véritable grandeur.

69. Pour construire la section d'une surface courbe par un

plan, il suffit de construire la suite des points suivant lesquels le plan donné coupe un système de lignes tracées sur la surface. Il n'y a plus, dans chaque cas particulier, qu'à choisir les lignes les plus simples. Ainsi, par exemple, pour obtenir la courbe qui provient de la section du cône circulaire projeté (*fig.* 3), par le plan *pa'p*, perpendiculaire au plan vertical de projections, on établira sur la surface du cône un certain nombre de génératrices, et la courbe de section devra contenir tous les points suivant lesquels ces lignes sont coupées par le plan donné.

Pour construire la projection horizontale de cette courbe, on abaissera des perpendiculaires à la ligne AZ, par chacun des points suivant lesquels la trace verticale du plan donné coupe les projections verticales des génératrices du cône. On peut vérifier les projections de ces points en les faisant tourner autour de la verticale projetante du sommet, jusqu'à ce qu'ils soient arrivés dans le plan 8—4, parallèle au plan vertical de projections. Ainsi, le point *uu'* rabattu en *u''*, sera projeté de là en *u'''* sur la droite *s*—8, d'où on le ramènera en *u*. La courbe 8''—4'' est la section que l'on a rabattue, en la faisant tourner autour de l'horizontale projetante du point *c'*.

70. La figure 5 contient les deux projections de la courbe qui résulte de la section d'un cylindre circulaire, par le plan *a'p*, perpendiculaire au plan vertical de projection. Par suite de la disposition adoptée pour cette épure, le plan donné et le cylindre sont les deux surfaces projetantes de la courbe demandée, qui a la droite 2'—6' pour l'une de ses projections, et pour seconde projection la circonférence 2—4—6—8. La courbe 2''—4''—6''—8'' est la section que l'on a rabattue dans sa véritable grandeur, en la faisant tourner autour de l'horizontale projetante du point *a'*.

71. Sur la figure 6, on a projeté et rabattu la section d'un ellipsoïde de révolution par le plan *p*. Cette courbe est facilement déterminée en projetant les points suivant lesquels le plan *p* coupe les cercles horizontaux et parallèles de la surface. Enfin la figure 7 contient la section de la sphère par le plan vertical *p*. Cette courbe est un cercle dont on évite presque toujours la projection par un rabattement.

72. **Problème.** *Trouver les points suivant lesquels une ligne droite perce la surface d'un corps.* Pour trouver l'intersection d'une surface donnée par une ligne quelconque, il faut faire passer par cette ligne une surface auxiliaire qui contiendra par conséquent les points demandés. Ces points devant appartenir à la surface donnée, sont nécessairement situés sur l'intersection des deux surfaces, et sur la ligne donnée. La question étant ainsi résolue d'une manière générale, il n'y a plus qu'à choisir, pour chaque cas particulier, la surface auxiliaire la plus commode. On emploie souvent, comme surface auxiliaire, l'une des deux surfaces projetantes de la ligne donnée.

73. Ainsi, par exemple, si l'on veut obtenir les points suivant lesquels la surface du tétraèdre projeté (*fig.* 1) est percée par la droite aa', on concevra, par cette droite, le plan projetant $c'p$, perpendiculaire au plan vertical de projection. On construira le quadrilatère $vuzo$, provenant de la section du tétraèdre donné par le plan coupant $c'p$, et les points (x,x') (n,n') seront les projections des intersections demandées.

Au lieu de construire la projection horizontale du polygone $vuzo$, provenant de la section du polyèdre donné par le plan auxiliaire $c'p$, on préfère souvent rabattre ce plan, et construire le polygone rabattu $v''u''z''o''$. Dans ce cas, il faut aussi rabattre la droite donnée. Or, cette droite étant suffisamment prolongée, rencontre la charnière du rabattement en un point s qui ne doit pas changer de place, et par conséquent, si l'on fait tourner un autre quelconque de ses points (e,e'), par exemple, jusqu'à ce qu'il soit projeté en e'', la droite donnée, rabattue en se'', rencontrera la quadrilatère $v''u''z''o''$ en deux points x'' et n'', qui, ramenés dans le plan $c'p'$ et de là dans le plan $c'p$, donneront les points (x,x') (n,n') pour les projections des intersections demandées. Si le point s ne se trouvait pas sur l'épure, ou rabattrait un autre point quelconque de la droite donnée.

Développements.

74. **Problème.** *Construire le développement de la surface d'un corps.* Pour exécuter un corps quelconque, il faut tracer

sur la pierre, le bois ou le métal dont ce corps doit être composé, toutes les lignes qui doivent diriger le travail de l'ouvrier. Ces lignes se déduisent de leurs projections, par des rabattements si elles sont planes, et par des développements si elles font partie de surfaces courbes. Quelques-uns de ces développements peuvent être construits d'une manière rigoureuse; d'autres ne peuvent être obtenus que par approximation, parce toutes les surfaces ne sont pas développables.

75. On dit, en général, qu'*une surface est développable*, lorsque cette surface peut être étendue tout entière sur un plan sans qu'aucune de ses parties soit déchirée ni doublée. Il résulte évidemment de là que les surfaces de tous les polyèdres pourront se développer; car il sera toujours possible de construire toutes les faces à côté les unes des autres et dans leurs véritables grandeurs.

76. Si l'on voulait, par exemple, développer la surface du tétraèdre projeté (*fig.* 1), on chercherait la véritable grandeur de chacune des arêtes (37), et l'on pourrait alors construire les quatre faces triangulaires du solide. Si quelques-unes des faces du polyèdre donné étaient quadrangulaires ou pentagonales, on les décomposerait en triangles dont on chercherait les côtés, et que l'on construirait ensuite pour recomposer toutes les faces dont l'ensemble formerait le développement du solide.

77. Lorsqu'il y a dans le polyèdre que l'on veut développer quelques relations de régularité ou de symétrie, on doit en profiter pour donner plus d'exactitude au résultat. Supposons, par exemple, que l'on veut développer la surface d'un prisme pentagonal (*fig.* 2). On projettera ce corps sur un plan parallèle à ses arêtes, afin de ne pas être forcé de rabattre toutes ces lignes pour obtenir leurs véritables longueurs. Le plan $pa'p$, perpendiculaire à la direction du prisme, contiendra la *section droite* dont la projection verticale sera a'—$3'$.

Il serait facile de construire la projection horizontale de ce polygone, en abaissant des perpendiculaires par tous les points suivant lesquels la trace verticale du plan $a'p$ est rencontrée par les projections verticales des génératrices du prisme. Mais cette projection horizontale de la section droite serait tout à fait inutile

pour le but que nous proposons ici. Ce qui est beaucoup plus essentiel, c'est d'obtenir la section a'—$3'$ dans sa véritable grandeur. Pour y parvenir, on fera mouvoir le plan $pa'p$, parallèlement à lui-même, jusqu'à ce qu'il soit parvenu dans la position $p''a''p''$; puis on le fera tourner autour de sa trace horizontale, ce qui donnera le polygone a'''—1—2—3—4, rabattu sur le plan horizontal de projection. On aurait pu rabattre le plan de section droite, sans le faire avancer jusqu'à ce qu'il soit arrivé en a''; mais cela aurait embarrassé l'épure, et c'est ce ce qu'il faut toujours éviter.

La véritable grandeur de la section droite étant obtenue, on portera tous ses côtés à la suite les uns des autres, et autant que possible, dans le prolongement de la trace verticale du plan $pa'p$, ce qui donnera la droite $a^{iv}a^{v}$ pour la section droite *rectifiée*. Enfin, par les points a^{iv}, $1''$,$2''$,$3''$,$4''$ et a^{v} on tracera des droites parallèles et égales aux arêtes du prisme, et l'on aura le développement de la surface latérale. Sur la figure 2, on n'a conservé que le développement de la partie de surface comprise entre la base inférieure du prisme et la section, par un plan p''' perpendiculaire au plan vertical de projection. Pour plus d'ordre, on fera bien de numéroter les arêtes sur toutes les projections, ainsi que sur le développement du prisme.

78. Pour appliquer le principe qui précède au développement de la surface convexe du cylindre, il suffit de considérer ce corps comme un prisme qui aurait un très-grand nombre de faces. Cette hypothèse n'est pas rigoureusement exacte, mais elle suffit presque toujours dans la pratique. On peut d'ailleurs s'approcher autant que l'on veut de l'exactitude absolue, en traçant un plus grand nombre de génératrices sur les parties de la surface dont la courbure est plus prononcée. Enfin, quand la section droite est un cercle; ce qui est le cas le plus fréquent, on peut mesurer le rayon avec beaucoup de soin, et prendre une longueur égale à $2\pi R$ pour le développement de la circonférence, après quoi, on établit sur cette ligne rectifiée, les point par lesquels on veut faire passer les génératrices nécessaires pour la solution du problème. La figure 4 est le développement du cylindre projeté figure 5, la ligne $8'''$—$4'''$—$8'''$ est la section

droite rectifiée; enfin, la courbe 8^{iv}—4^{iv}—8^{iv} est le développement de la section du cylindre par le plan *a'p* perpendiculaire au plan vertical de projection.

79. Pour développer la surface d'un cône circulaire ou de révolution (*fig.* 3), on peut opérer de la manière suivante. Supposons que la base du cône projeté soit partagée en un grand nombre de parties égales, si l'on conçoit une génératrice par chacun des points de division de cette ligne, la surface convexe du cône se composera d'une suite de triangles isocèles égaux entre eux. Tous ces triangles, placés à côté les uns des autres, formeront évidemment un secteur de cercle s'—$8'''$—$4'''$—$8'''$ et la seule condition nécessaire pour que ce secteur représente le développement du cône, c'est que l'arc $8'''$—$4'''$—$8'''$ soit égal à la circonférence du cercle 2—4—6—8.

Or, si nous exprimons l'angle $8'''$—s'—$8'''$ par x, l'arc $8'''$—$4'''$—$8'''$ par y, le côté s'—$8'''$ par R, et le rayon s—8 par r, nous aurons la proportion

$$x : 360 :: y : 2\pi R,$$

d'où $$x \times 2\pi R = 360\, y,$$

mais on doit avoir $$y = 2\pi r.$$

Multipliant et réduisant, on obtient

$$R x = 360 r, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{360 r}{R}.$$

Ce qui donne l'angle du secteur.

Supposons, par exemple, que l'on ait $R = 1^m,5$ et $r = 0^m,4$ la formule précédente donnera :

$$x = \frac{360 \times 4}{15} = 24 \times 4 = 96 \textit{ degrés.}$$

Ainsi, en décrivant un secteur de 96 *degrés*, avec un rayon de 15 *décimètres*, on aura le développement d'un cône dont le rayon de la base serait $0^m,4$ et le côté $1^m,5$.

La courbe $8'$—4^{iv}—8^{iv}, est le développement de la section du cône par le plan *pa'p*. Pour construire cette ligne, on a fait tourner toutes les génératrices autour de la verticale projetante

du sommet. Par ce mouvement, chaque point de la courbe est venu se placer sur la génératrice s'—$8'''$, d'où on l'a fait arriver sur la génératrice correspondante du développement, en lui faisant parcourir un arc de cercle décrit du point s' comme centre.

CHAPITRE III.

Courbes planes.

80. **Lieu d'un point mobile, sections par un plan.** Une courbe est plane lorsque tous les points sont situés dans un même plan. Une courbe plane peut être engendrée par un point qui se meut dans un plan, suivant certaines conditions. Mais on peut encore obtenir une courbe plane en coupant une surface courbe quelconque par un plan.

81. Lorsqu'une courbe provient de la section d'une surface par un plan, elle possède des propriétés qui dépendent de la nature de la surface coupée.

Ainsi en coupant les surfaces projetées sur les figures 3, 5, 6 et 7, par des plans horizontaux, on obtiendra toujours pour sections des cercles, tandis que si l'on incline le plan coupant, les courbes de sections seront modifiées suivant l'inclinaison du plan et la nature de la surface coupée.

82. **Courbes du deuxième degré.** Les plus remarquables des courbes planes sont les *courbes du second degré* (*pl.* 5), ainsi nommées, parce que toutes leurs propriétés peuvent être exprimées par une équation du second degré. Les courbes du second degré sont au nombre de trois, savoir : l'*ellipse* (*fig.* 1...6), la *parabole* (*fig.* 7, 8 et 9), et l'*hyperbole* (*fig.* 10, 11 et 12).

83. **Ellipse.** L'ellipse est une courbe telle que *la somme des distances de chacun de ses points à deux points fixes pris dans son plan, et que l'on nomme* FOYERS, *est une quantité constante.*

tiendra à l'ellipse. En recommençant, on obtiendra autant de points de la courbe que l'on voudra. Cette construction provient de ce que la propriété énoncée (84) convient aussi à l'ellipse construite sur ses diamètres conjugués. Si l'on voulait retrouver le grand axe, il suffirait de joindre le centre avec le milieu de l'arc *c*X.

90. **Tangentes et normales.** *Construire une tangente à l'ellipse par un point donné sur la courbe. Première méthode.* Le point *m* étant donné sur la courbe (*fig.* 5), on décrira du point A, comme centre, avec un rayon AX′ égale à la moitié du grand axe, l'arc de cercle X′*n*, qui coupera en *n* l'ordonnée passant par le point *m*; on construira (*Géom.*) la droite *pn* tangente à cet arc en *n*; et le point *p*, où cette tangente ira rencontrer le prolongement du diamètre XX′ appartiendra à la droite *pm*, qui est la tangente demandée. Cette construction vient de ce que, si plusieurs ellipses ont un axe commun, et que par tous les points situés sur la même ordonnée on construise des tangentes, toutes ces lignes doivent concourir en un même point sur le prolongement de l'axe commun. Or le cercle pouvant être considéré comme une ellipse, la tangente au cercle détermine le point où doit aboutir celle de l'ellipse.

91. *Deuxième méthode.* Si en un point *m*″ de la courbe on conçoit une tangente et les deux rayons vecteurs (83), la tangente fera des angles égaux avec ces deux droites, d'où résulte la construction suivante. Après avoir déterminé les foyers F, F′, on construira les deux rayons vecteurs F*m*″, F′*m*″; on partagera l'angle F*m*′F′ en deux parties égales, et la ligne *qm*″, perpendiculaire à la bissectrice, sera la tangente.

92. La droite *km*″ perpendiculaire sur la tangente est ce que l'on nomme une *normale*.

93. *Construire une tangente à l'ellipse parallèlement à une droite donnée.* Soit *os* la droite donnée. On mènera d'abord une corde *c*X parallèle à la droite *os*, puis le rayon A*m*′ passant par le milieu de la corde *c*X déterminera le point de tangence, et par conséquent la tangente, qu'il sera facile de construire, puisque sa direction est donnée.

94. *Construire une tangente à l'ellipse par un point donné*

en dehors de cette courbe. Soit o le point donné (*fig.* 6). De ce point, comme centre, et prenant pour rayon sa distance à l'un des foyers, on décrira un premier arc $bF'c$; de l'autre foyer F, comme centre avec un rayon égal au grand axe de l'ellipse, on décrira un second arc de qui coupera le premier en deux points s, u. On joindra ces points avec le centre du second arc par deux droites dont les intersections avec la courbe seront les points de tangence. En effet, le rayon du second arc étant égal au grand axe de l'ellipse, on aura

$$sm' + m'F = 2a;$$

mais par la propriété de la courbe (83), on a

$$F'm' + m'F = 2a; \quad \text{donc} \quad sm' = m'F'.$$

Ainsi, le triangle $sm'F'$ est isocèle; mais le point o, centre du premier arc, est à égale distance des points s, F'. Donc la droite om' est perpendiculaire à sF', et partage l'angle $sm'F'$ en deux parties égales. Donc enfin l'angle $om'F' = pm'F$, et la droite op faisant des angles égaux avec les rayons vecteurs, est une tangente (91). Il en est de même de la droite oq.

95. **Parabole.** *La parabole est une courbe telle que pour chacun de ses points la distance à une droite nommée* DIRECTRICE *est égale à la distance à un point que l'on appelle* FOYER.

96. **Construction de la parabole.** Soit (*fig.* 7) la directrice co, et le foyer F. Pour construire la parabole, on abaissera la perpendiculaire FD, et le point A, milieu de cette perpendiculaire, sera un point de la courbe. Pour en obtenir d'autres, on construira en un point p quelconque une perpendiculaire pm, et du point F, comme centre avec un rayon égal à pD, on décrira un arc de cercle qui coupera la perpendiculaire mp en deux points m, m', appartenant à la parabole. On recommencera jusqu'à ce que l'on ait un assez grand nombre de points pour construire la courbe. Une parabole peut être considérée comme une ellipse dont le grand axe est infini, et dans laquelle cependant la quantité AF serait déterminée. Il est évident, d'après cela, que le centre est aussi à l'infini, ainsi que le second foyer. (*Géom. anal.*)

97. Une parabole étant donnée, on peut se proposer de retrouver son axe principal. Pour cela, on construira deux cordes parallèles, et la droite *qs* passant par les milieux de ces cordes sera un diamètre ; construisant *mm'* perpendiculaire sur *qs*, on en prendra le milieu *p*, ce qui donnera un point de l'axe demandé, que l'on mènera parallèlement à *qs*. Cela vient de ce que dans la parabole tous les diamètres sont parallèles, puisque le centre est situé à l'infini (96).

98. **Tangentes et normales.** *Première méthode.* Si le point de tangence est donné sur la courbe, on construira (*fig.* 8) l'ordonnée *mp* passant par ce point; puis portant A*p* de A en *q*, ce dernier point appartiendra à la tangente. Cette construction résulte de ce que, *dans toute parabole, la distance* qp, *que l'on nomme la sous-tangente, est toujours double de l'abscisse du point de tangence.*

99. *Deuxième méthode.* On joindra le foyer F avec le point de tangence, par la droite F*m*, et après avoir mené *m*F', parallèle au grand axe AX, on partagera l'angle F*m*F' en deux parties égales par la droite *ks*; il ne restera plus qu'à mener au point *m* une perpendiculaire sur *ks*. Dans cette construction, *m*F' remplace le rayon vecteur allant aboutir au second foyer, situé à l'infini, comme nous l'avons dit plus haut.

100. La droite *ks* perpendiculaire sur *qm* sera la *normale*.

101. **Foyers, directrice.** Si par le point *v*, milieu de *qm*, on mène une perpendiculaire à la tangente, le point F, où cette perpendiculaire rencontrera l'axe AX, sera le foyer de la parabole. Enfin, portant AF de A en D, et construisant la perpendiculaire *c*D, on aura retrouvé la directrice.

102. Si l'on voulait mener *une tangente parallèle à une ligne donnée* bc, on construirait une corde A*d* parallèle à cette ligne, et la droite *um'* menée par le milieu de A*d* parallèlement à l'axe AX, déterminerait en *m'* le point de tangence; ce qui suffit, puisque la direction de la tangente est donnée.

103. *Construire une tangente à la parabole, par un point hors de la courbe.*

Soit *o* (*fig.* 9) le point donné. On décrira de ce point, comme centre, et passant par le foyer, un arc de cercle *u*F*s* qui

coupera la directrice aux deux points u, s; on mènera par ces deux points et parallèlement à l'axe AX les droites sm', um'', dont les intersections avec la courbe seront les points de tangence. Cette construction est analogue à celle que nous avons donnée (93); la directrice remplace le cercle décrit du second foyer comme centre.

104. **Hyperbole.** L'hyperbole ne diffère de l'ellipse qu'en ce qu'au lieu de la somme, c'est la différence des rayons vecteurs qui est égale à une quantité constante que l'on nomme $2a$.

105. **Construction de l'hyperbole.** *Première méthode* (*fig.* 10). Les foyers FF' d'une hyperbole étant donnés, ainsi que la quantité $2a$ qui est la différence des rayons vecteurs; du point F', comme centre, avec un rayon quelconque F'o, on décrira un arc de cercle; ensuite du point F, comme centre, avec un rayon FO égal à F'O $+ 2a$, on décrira un second arc, et le point où ces deux arcs se couperont appartiendra à la courbe demandée. Ici, comme dans l'ellipse, toute ligne telle que kn, qui passe par le milieu de deux cordes parallèles, se nomme un *diamètre*, et le point A, milieu de la portion de ce diamètre comprise entre les points où il coupe la courbe, se nomme le *centre*. Le diamètre XX', qui passe par les foyers, se nomme l'*axe transverse*, et YY', qui lui est perpendiculaire, se nomme l'axe *non transverse*, La portion BB' de l'axe transverse est égale à $2a$.

106. **Asymptotes.** Il existe dans le plan de toute hyperbole deux droites qui jouissent de propriétés remarquables. Ces droites, AD, AE, passent par le centre de la courbe et s'en rapprochent sans jamais la toucher, ou, en d'autres termes, elles ne touchent la courbe qu'à l'infini. On leur donne le nom d'*asymptotes*.

107. Les asymptotes fournissent un moyen très-simple de construire une hyperbole lorsqu'on en connaît un point. En effet, soient donnés le point s et les deux asymptotes DD', EE'. On construira dans une direction quelconque, en passant par le point s, la sécante pu, et prenant ps, on le portera de u en v; ce qui donnera le point v. De même, construisant une autre sécante si, on portera st de c en i. En continuant ainsi dans toutes

les directions, on aura autant de points que l'on voudra sur les deux branches de la courbe.

108. **Centre, axes, foyers.** La courbe étant construite, le centre et les axes pourront être retrouvés comme dans l'ellipse. Pour obtenir les foyers, on décrira un arc du point A, comme centre, de manière à passer par le point *h*, où l'asymptote est rencontrée par l'ordonnée B*h*; les intersections de ce cercle avec l'arc transverse seront les foyers. On ferait l'opération inverse si l'on voulait construire les asymptotes, connaissant les foyers. (*Géom. anal.*)

109. **Tangentes et normales.** *Première méthode* (*fig.* 11). Pour obtenir la tangente en un point *m* de l'hyperbole, on construira *pm* parallèle à l'asymptote; puis faisant $po = Ap$, le point *o* appartiendra à la tangente. Cette construction provient de ce que, dans toute hyperbole, si l'on construit une tangente, le point de tangence doit toujours occuper le milieu de la portion de la tangente comprise entre les asymptotes.

110. *Deuxième méthode.* On peut encore construire la tangente en un point donné *m'*, en construisant les deux rayons vecteurs F'*m'*, F*m'*, et partageant l'angle que ces rayons font entre eux, en deux parties égales.

111. Pour *construire une tangente parallèle à une ligne donnée* ts, on mènera d'abord une corde B*c* parallèle à cette ligne, puis la droite A*v* passant par le milieu de la corde B*c* déterminera en *m* le point de tangence, et comme l'on connaît la direction de la tangente, il sera facile de la construire.

112. *Construire une tangente à l'hyperbole par un point pris en dehors de cette courbe.* Soit *o* le point donné (*fig.* 12). De ce point, comme centre, on décrira un premier cercle passant par l'un des foyers F. De l'autre foyer F', comme centre, avec un rayon égal à $B'B = 2a$, on décrira un second cercle, et l'on joindra par deux droites les points d'intersection de ces deux cercles avec le foyer F' qui a servi de centre au second cercle; les points *m'm''*, où ces droites rencontreront la courbe, seront les points de tangence.

113. La *normale* se construira comme ci-dessus, en menant par le point de tangence, une perpendiculaire à la tangente.

114. **Sections coniques.** Les courbes du *second degré* sont encore nommées sections coniques, par ce qu'on obtient toujours l'une d'elles lorsque l'on coupe un cône circulaire par un plan. Supposons, par exemple, le cône circulaire ou de révolution, qui est projeté sur la *fig.* 2, *pl.* 6. Si l'on coupe ce cône par un plan p perpendiculaire au plan vertical de projection, et que l'on fasse tourner ce plan autour de l'horizontale projetante du point a, la section changera de forme, suivant les différentes positions du plan coupant; mais on obtiendra toujours l'une des trois courbes que nous venons d'étudier précédemment; ainsi, la section par le plan p sera une ellipse, la section par le plan p_1 sera une parabole, et la section par le plan p_2 sera une hyperbole. En général, si l'angle VAK est plus grand que HSK, la courbe de section sera une *ellipse;* lorsque l'angle V'AK sera égal à HSK la courbe sera une *parabole*, et lorsque l'angle V''AK sera plus petit que HSK on obtiendra une hyperbole.

115. **Section elliptique du cône** (*fig.* 1). Le plan coupant p étant perpendiculaire au plan vertical de projection, il résulte évidemment de là, que la projection verticale de la courbe cherchée sera une ligne droite $a'o'$. Pour construire la projection horizontale de la même courbe, il suffira de déterminer les points suivant lesquels le plan p coupe un certain nombre de génératrices du cône.

Pour le plus grand nombre de ces points, il suffira d'abaisser par leurs projections verticales des perpendiculaires à la ligne AZ; ainsi, lorsqu'on aura tracé les deux projections de la génératrice (s—1), il est évident que la projection horizontale u du point uu' se déduira immédiatement de sa projection verticale u'. Mais lorsqu'il s'agira d'un point très-essentiel dont il sera nécessaire de vérifier la position, lorsque surtout cette position résultera de la rencontre de deux lignes qui se couperont suivant un angle trop aigu, il sera nécessaire d'opérer de la manière suivante.

Ainsi, par exemple, si l'on veut déterminer ou vérifier la projection horizontale du point mm', on fera tourner la génératrice s—2 qui contient ce point autour de la verticale projetante du sommet, jusqu'à ce qu'elle soit parvenue dans la position

s—$2'$, parallèle au plan vertical de projection; par suite de ce mouvement, le point m' sera venu se rabattre en m'', d'où l'on déduira sa nouvelle projection horizontale m''' que l'on ramènera ensuite en m sur la projection horizontale de la génératrice s—2. Une seule opération déterminera deux points m,m, situés sur les génératrices qui ont la droite s—2 pour projection verticale commune.

116. Au lieu de construire isolément les différents points de la courbe demandée, on peut en déterminer les axes, ce qui permettra de la construire en opérant comme nous l'avons dit au n° 85. On remarquera d'abord que, si par le sommet du cône on conçoit un plan parallèle au plan vertical de projection, ce plan sera placé symétriquement par rapport au cône et au plan coupant, d'où il résulte qu'il sera également un plan de symétrie par rapport à la courbe intersection des deux surfaces, et que, par conséquent, il contiendra l'axe ao, $a'o'$ de cette courbe. Le second axe, perpendiculaire au premier, aura pour projection verticale le point m', milieu de la droite $a'o'$, et pour projection horizontale la droite mm dont les extrémités s'obtiendront en opérant comme nous l'avons dit précédemment (115).

117. Pour obtenir la courbe dans sa véritable grandeur, on rabattra le plan coupant en le faisant tourner autour de sa trace horizontale. On peut se contenter de rabattre le centre et les axes qui sont connus dans leur véritable grandeur, le premier $o''a''$ par sa projection verticale $o'a'$ et le second m^{IV} m^{IV} par sa projection horizontale mm; puis on construira la courbe rabattue par la méthode du n° 85. Il est très-essentiel de remarquer que le centre de la courbe de section est au milieu de la droite mm, $m^{IV}m^{IV}$ et que ce point projeté en m' n'appartient pas à l'axe du cône.

118. *Tangentes.* Il est souvent utile de construire des tangentes à la courbe qui provient de la section d'une surface par un plan. Or la tangente à la courbe sera évidemment située dans le plan de cette courbe; de plus elle ne peut pas être tangente à la courbe sans être également tangente à la surface qui contient cette courbe, d'où il résulte qu'elle doit être située dans le

plan tangent à la surface. Ainsi, la tangente en un point de la courbe de section devant être située en même temps dans le plan tangent et dans le plan coupant, elle sera l'intersection de ces deux plans.

Donc, pour construire par un point u,u' une tangente à la courbe de section, on tracera la génératrice s—1 ; et la droite 1—v, tangente à la base du cône, sera la trace du plan tangent. La droite u—v, intersection du plan tangent sv—1 et du plan coupant pv', sera la tangente demandée. La projection verticale de cette tangente se confondra avec la trace verticale $v'p$ du plan coupant qui est perpendiculaire au plan vertical de projection.

119. Pour construire dans le rabattement la tangente vu'', on remarquera que le point v ne doit pas changer de place lorsque l'on fait tourner le plan coupant autour de sa trace horizontale $v'v$. On peut aussi construire la tangente par l'une des méthodes indiquées aux nos 90 et 91.

120. **Section parabolique du cône.** Si le plan coupant pv' (*fig.* 3) était parallèle à l'une des génératrices s—3 du cône, il est évident que cette génératrice ne serait pas coupée, et la courbe de section ne pourrait plus être fermée ; dans ce cas, elle prend le nom de *parabole*. Les différents points de la parabole pourront être obtenus comme ceux de l'ellipse. En effet, le plan coupant étant perpendiculaire au plan vertical AZ, la projection verticale de la courbe demandée se réduit à une ligne droite $v'a'$, de sorte qu'il ne reste plus, pour obtenir la projection horizontale, qu'à construire des perpendiculaires par les points suivant lesquels la droite $v'a'$ coupe les projections verticales des génératrices du cône. Ainsi, par exemple, la projection horizontale u sera déterminée par la rencontre de la perpendiculaire abaissée du point u', avec la projection horizontale s—1 de la génératrice correspondante.

Pour déterminer le point m on fera tourner la génératrice s—2 jusqu'à ce qu'elle soit arrivée dans la position s—2', parallèle au plan vertical de projection. Par suite de ce mouvement, le point m' sera venu se placer en m'', d'où l'on déduira sa nouvelle projection horizontale m''' que l'on ramènera ensuite en m.

121. *Tangente.* Pour construire la tangente au point u de la projection horizontale de la courbe, on construira d'abord la droite 1—v, tangente à la base du cône et passant par le pied de la génératrice s—1. La droite 1—v, trace horizontale du plan tangent, rencontrera la trace horizontale $v'v$ du plan coupant en un point v et la droite vu, intersection de ces deux plans sera la tangente demandée. La projection verticale de la tangente se confond ici avec la trace verticale $v'p$ du plan coupant.

122. Pour obtenir la courbe dans sa grandeur véritable, on rabattra le plan coupant autour de sa trace horizontale. On évitera la confusion en faisant avancer le plan coupant jusqu'à l'endroit où l'on veut effectuer le rabattement. Dans ce mouvement, le point u' vient se placer en u'', et la droite $v''u'''$ est la tangente au point u''' de la courbe rabattue. Enfin, on peut obtenir une tangente sur le rabattement par la méthode exposée au n° 98.

123. Dès que l'on aura obtenu la tangente, on pourra déterminer le foyer et la directrice, en opérant comme nous l'avons dit au n° 101. Ce qui permettra de construire la courbe par la méthode indiquée au n° 96.

124. **Section hyperbolique du cône.** De ce que les génératrices d'un cône doivent toutes passer par le sommet, il ne faut pas les considérer comme terminées à ce point; ainsi, pendant que la génératrice s'—1 (*fig.* 6 et 7) engendrera la surface du cône, le prolongement s'—1' de cette droite engendrera la surface d'un second cône opposé au premier par le sommet. Cependant, ces deux surfaces étant engendrées par la même droite, on les considère comme composant la surface d'un seul cône dont elles forment ce que l'on appelle les *deux nappes*. Or, lorsque le plan coupant pv' sera incliné de telle manière qu'il coupe les deux nappes du cône, la courbe de section se composera de deux branches séparées zaz,yuy dont l'ensemble forme une *hyperbole*.

125. Les points de l'hyperbole pourront être obtenus comme ceux de l'ellipse et de la parabole, en abaissant des perpendiculaires par les points suivant lesquels la trace verticale pv' du plan coupant rencontre les projections verticales des géné-

ratrices du cône. Ainsi, par exemple, les perpendiculaires abaissées des points a',u' détermineront les projections horizontales correspondantes sur la droite b—1 parallèle au plan vertical de projection. En traçant de nouvelles génératrices que l'on n'a pas conservées ici, on obtiendra sur chacune d'elles un point de la courbe demandée.

126. Pour déterminer ou vérifier la position du point m on rabattra la génératrice s—2 en la faisant tourner autour de l'axe du cône, jusqu'à ce qu'elle soit parvenue dans la position s—2', parallèle au plan vertical de projection. Par suite de ce mouvement, le point m' rabattu en m'', se projettera en m''', d'où on le ramènera en m sur la projection horizontale de la génératrice s—2.

127. Pour obtenir la courbe dans sa véritable grandeur on a fait avancer le plan coupant jusqu'à ce qu'il soit arrivé dans la position $p'v''v'''$, puis on a fait tourner ce plan autour de sa trace horizontale jusqu'à ce qu'il soit rabattu sur le plan horizontal de projection.

128. *Asymptotes.* Nous avons vu (106) que l'on peut considérer les asymptotes comme deux droites qui passent par le centre o,o',o'' de la courbe, et qui *ne la touchent qu'à l'infini.* Pour les obtenir, on déterminera le point o', situé au milieu de la droite $u'a'$. On joindra ce point avec le sommet du cône par la droite $o's'b'$, suivant laquelle on fera passer deux plans tangents qui auront pour traces horizontales les droites bk. Les intersections de ces droites avec la trace horizontale $v'v$ du plan coupant donneront deux points x,x qui étant joints avec le point o, détermineront les droites xg, projections horizontales des deux asymptotes de la courbe demandée. Lorsque l'on fait avancer le plan coupant jusqu'a ce qu'il soit parvenu dans la position $p'v''v'''$, les deux points x viennent se placer en x'' et le point oo' en o'', où il devient le centre de l'hyperbole rabattue (*fig.* 8).

129. Lorsque l'on connaît les asymptotes et un seul point quelconque de la courbe, il est facile de la construire par la méthode indiquée au n° 107.

130. *Tangente.* On construira la tangente à l'hyperbole en

opérant comme nous l'avons dit au n° 109. En effet, en faisant $o''n = nr$, on aura $rn'' = n''h$, de sorte que la droite rh sera une sécante pour laquelle les deux points de section réunis en un seul seraient devenus un point de tangence n''.

131. On peut encore obtenir la tangente en opérant de la manière suivante : on tracera la droite $u''q$, perpendiculaire sur $a''u''$, ce qui déterminera le point q. On décrira du point o'', la demi-circonférence cqe qui a pour rayon la distance $o''q$, et l'on obtiendra ainsi les deux points c,e qui seront les *foyers* de l'hyperbole, puis on opérera comme au n° 110. Enfin, on peut construire par le point donné un plan tangent p'' dont l'intersection avec le plan coupant sera la tangente demandée.

132. Le cylindre circulaire pouvant être considéré comme un cône dont le sommet serait infiniment éloigné, la section par un plan sera toujours un *cercle* ou une *ellipse* qu'il sera souvent facile de construire par les axes.

CHAPITRE IV.

Courbes à double courbure.

133. **Définitions.** Nous avons dit (80) que l'on donnait le nom de courbes planes aux lignes dont tous les points sont situés dans un plan. Ainsi, la courbe qui est représentée en perspective sur la *fig.* 1 de la *pl.* 7 est une courbe plane ; mais si l'on fait prendre une courbure quelconque à la surface sur laquelle la ligne est tracée, cette courbe cessera d'être plane comme on le voit (*fig.* 2). Dans ce cas on dit qu'elle est à double courbure, parce que, indépendamment de la courbure qui lui est propre, elle participe encore de la courbure de la surface sur laquelle elle est tracée.

134. On projette les courbes à double courbure en opérant comme pour toute autre ligne. Supposons, par exemple (*fig.* 3), qu'une courbe ABCDE, ayant un grand nombre de sinuosités, soit située comme on voudra dans l'espace. Si de chacun de ses points on abaisse une perpendiculaire sur le plan de projection P, la courbe *abcde* qui contient les pieds de toutes ces perpendiculaires sera la projection de la ligne ABCDE. La surface qui contient toutes les perpendiculaires abaissées par les différents points de la courbe donnée se nomme surface projetante ou plutôt *cylindre projetant* de cette courbe. Ainsi, l'on voit que la projection *abcde* de la courbe est la trace de son cylindre projetant.

135. Une seule projection ne suffit pas pour déterminer la forme et la position d'une courbe dans l'espace; car il est évident que la même projection *abcde* conviendrait à toutes les courbes qui seraient situées dans la même surface projetante. Il résulte de là que pour déterminer la grandeur et la position d'une ligne courbe, il faut la projeter sur deux plans comme on le voit (*fig.* 4); car alors chacun de ses points étant déterminé de position, la courbe elle-même sera déterminée. La projection verticale *a'e'* de la courbe est la ligne qui passe par les pieds de toutes les perpendiculaires abaissées des différents points de cette courbe sur le plan vertical AY, et la projection horizontale *ae* de la même ligne est la courbe qui contient les pieds de toutes les perpendiculaires abaissées sur le plan horizontal AX.

136. Nous avons dit tout à l'heure qu'une courbe était complétement déterminée par ses deux projections. En effet, si *a'e'* (*fig.* 5) est la projection verticale d'une courbe quelconque AE, il est évident que cette courbe doit être située sur la surface du cylindre projetant horizontal H; mais si *ae* est la projection horizontale de la courbe, il faut que cette ligne soit située sur la surface du cylindre projetant vertical V; or, la courbe dont il s'agit devant être située en même temps sur les deux cylindres projetants dont les lignes *ae*, *a'e'* sont les traces, elle sera l'intersection de ces deux surfaces et sera par conséquent déterminée. La courbe AE étant l'intersection des deux cy-

lindres projetants H et V, il est évident qu'elle participe de la courbure de chacun d'eux; c'est encore pour cette raison que l'on donne à cette ligne le nom de courbe à double courbure. Ainsi, une courbe peut être à double courbure, parce qu'elle est tracée sur une surface courbe (*fig.* 2), ou parce qu'elle provient de l'intersection de deux surfaces courbes (*fig.* 5). Un corps ou solide C (*fig.* 6) sera à double courbure lorsque ses arêtes ne seront pas planes; ainsi, une pierre ou un morceau de bois peut toujours être déduit de l'un des trois solides élémentaires représentés sur la fig. 6. Le premier A est un parallélipipède rectangle dont on peut déduire toute espèce de pièce droite. Le second solide B sera la forme primitive de toutes les pièces dont les arêtes seront des courbes planes, et toutes les pièces dont les arêtes seront à double courbure devront être déduites d'un solide tel que celui qui est désigné par la lettre C.

137. **Surfaces courbes.** La forme d'une courbe à double courbure dépendant de la nature des surfaces sur lesquelles cette courbe est tracée, il sera utile de rappeler ici quelques-unes des considérations générales sur lesquelles on établit la théorie des surfaces courbes dans les traités de Géométrie descriptive.

138. Toute surface peut être considérée comme engendrée par le mouvement d'une ligne assujettie à se mouvoir suivant des conditions données, *l'énoncé de ces conditions formant la définition de la surface.* Ainsi le plan est engendré par le mouvement d'une droite qui se meut parallèlement à elle-même, en s'appuyant toujours sur une autre droite immobile dans l'espace. La droite mobile se nomme la génératrice, et la droite sur laquelle elle s'appuie a reçu le nom de directrice. Si nous remplaçons cette dernière ligne par une courbe, nous obtenons une surface cylindrique; et si, au lieu du parallélisme des génératrices, nous les faisons concourir en un même point, nous avons une surface conique.

139. La plus utile des surfaces courbes est celle à laquelle on donne le nom de *cylindre.* Il ne faut pas attacher à ce mot le même sens que dans la géométrie élémentaire; en effet, dans cette partie des mathématiques, un cylindre est un corps

ou solide engendré par un rectangle, que l'on ferait tourner autour d'un de ses côtés, tandis que, dans la géométrie descriptive, on donne le nom de cylindre à la surface engendrée par une droite qui se meut parallèlement à elle-même, quelles que soient, du reste, les conditions qui déterminent le mouvement de cette droite, que l'on nomme la *génératrice* du cylindre. On peut toujours supposer que la génératrice est assujettie à s'appuyer constamment sur une courbe que l'on nomme la *directrice*. Ainsi la nature du cylindre dépendra principalement de la forme de sa directrice, et l'on conçoit que si cette courbe était remplacée par une ligne droite, le cylindre deviendrait un plan.

140. Les surfaces *cylindriques*, *coniques et sphériques*, sont la base essentielle de presque toutes les combinaisons de l'industrie; mais il est utile cependant de considérer les surfaces courbes sous un point de vue plus général. Quoique la courbure des surfaces puisse être variée d'une infinité de manières, on peut renfermer tous les cas particuliers dans une même définition, en disant que *toute surface est engendrée par le mouvement d'une ligne, droite ou courbe, plane ou à double courbure, constante ou variable de forme, et qui se meut suivant des conditions données.* Après les surfaces cylindriques, coniques et sphériques, celles dont on fait le plus souvent usage sont les surfaces de révolution et les surfaces réglées.

141. **Surfaces de révolution**. On donne en général le nom de surface de révolution A et B (*fig.* 9) à celles qui proviennent du mouvement d'une ligne C ou D, assujettie à tourner autour d'une droite fixe, par rapport à laquelle elle conserve toujours la même position. Dans ce mouvement, chaque point de la génératrice décrit un cercle dont le centre est sur la droite immobile E ou F, que l'on nomme l'*axe* de la surface.

142. Un des caractères de toute surface de révolution, c'est que la section par un plan perpendiculaire à l'axe est toujours une circonférence du cercle. Le rayon de cette circonférence est égal à la distance de l'axe au point suivant lequel la génératrice est coupée par le plan dont il s'agit. Il suit de là, que si l'on coupe une surface de révolution par un certain nombre de

plans perpendiculaires à son axe, on obtiendra un système de cercles parallèles entre eux, et que l'on appelle, par cette raison, *les parallèles de la surface.* La portion de surface comprise entre deux parallèles quelconques se nomme une *zone.*

143. Toute section d'une surface de révolution par un plan qui contient son axe, se nomme une *section méridienne.* Les cas particuliers de surface de révolution se distinguent ordinairement par la nature de leur section méridienne. Ainsi, l'*ellipsoïde de révolution* A (*fig.* 9) est la surface engendrée par le mouvement d'une demi-ellipse que l'on ferait tourner autour de l'un de ses axes. La sphère est un ellipsoïde de révolution qui a pour section méridienne un cercle. La *surface annulaire* ou *tore* serait engendrée par le mouvement d'un cercle tournant autour d'une droite située dans son plan. La section méridienne se compose, dans ce cas, de deux cercles égaux au cercle générateur, et placés symétriquement par rapport à l'axe. Le plan perpendiculaire à l'axe et mené par le centre du cercle générateur, contient le plus grand parallèle de la surface, et le plus petit, qui est le cercle de gorge.

144. Si la génératrice d'une surface de révolution est une parabole, la surface sera un *paraboloïde* et prendra des formes différentes, suivant que la révolution aura lieu autour de l'axe de la parabole ou autour d'une droite perpendiculaire à cet axe. Enfin, on nomme *hyperboloïde de révolution* la surface qui est engendrée par une hyperbole tournant autour de l'un de ses axes. Si la révolution se fait autour de l'axe non transverse, la surface est continue, c'est-à-dire qu'elle pourrait être parcourue par un point dans toute son étendue. Pour exprimer cette propriété, on donne à cette surface B (*fig.* 9), le nom d'*hyperboloïde de révolution à une nappe.* Il n'en serait pas de même si le mouvement s'était fait autour de l'axe transverse, il y aurait alors dans cette surface deux parties séparées l'une de l'autre, ce qui lui ferait donner le nom d'*hyperboloïde de révolution à deux nappes.* Les surfaces de révolution sont souvent employées pour dômes et coupoles dans la formation des combles.

145. **Surfaces réglées.** On donne, en général, le nom de *surfaces réglées* à celles qui sont engendrées par une ligne droite

qui se meut suivant certaines conditions. Dans le cas le plus général, on peut supposer que la génératrice est assujettie à s'appuyer sur trois courbes que l'on nomme les *directrices* de la surface. Cette condition suffit pour déterminer chaque position de la génératrice; car une droite qui, passant par un point de la première courbe, glisserait en s'appuyant sur la seconde, serait déterminée de position, au moment où elle rencontrerait la troisième.

146. Dans quelques surfaces, la génération est déterminée par d'autres conditions. Ainsi, par exemple, dans les *surfaces cylindriques*, que l'on peut regarder comme cas particuliers des surfaces réglées, puisque la génératice est une ligne droite, on donne ordinairement une directrice, et les deux autres sont remplacées par la condition que toute les positions de la génératrice soient parallèles entre elles. Dans les *cônes*, deux des directrices sont remplacées par cette condition, que toutes les génératrices contiennent le sommet Enfin, dans les *surfaces normales*, la condition que la génératrice soit constamment perpendiculaire à une surface donnée permet de n'employer qu'une directrice; mais tous ces cas particuliers pourront facilement se ramener au cas général; car on pourra toujours, dans chaque cas, prendre pour directrices trois courbes quelconques situées dans la surface, de manière qu'elles soient coupées par toutes les génératrices.

147. L'une des trois directrices peut encore être remplacée par cette condition, que *deux positions consécutives de la génératrice se trouvent toujours dans un même plan*, et c'est en cela que consiste le caractère des *surfaces développables*. Les surfaces réglées qui sont privées de la propriété d'être développables se nomment *surfaces gauches*.

148. Enfin, on peut remplacer l'une des directrices par cette condition que la génératrice, dans son mouvement, reste toujours parallèle à un plan donné que l'on nomme *plan directeur*. Ce dernier genre de surfaces réglées étant fréquemment employé dans les applications, on en forme une classe particulière; ainsi on distingue deux espèces principales de surfaces réglées:

1° *Les surfaces réglées qui ont trois directrices ;*

2° *Les surfaces réglées qui ont deux directrices et un plan directeur*. En prenant un plan de projection perpendiculaire au plan directeur, la construction de ces sortes de surfaces devient extrêmement simple.

149. **Surfaces réglées hélicoïdes.** Parmi les cas particuliers de surfaces réglées, nous devons surtout remarquer celles auxquelles on a donné le nom de surfaces hélicoïdes, parce que les courbes directrices de ces surfaces sont des **hélices**. L'*hélice abcd....*, etc. (*fig.* 17), est une courbe qui coupe, suivant un angle constant, toutes les génératrices d'un cylindre. On peut dire encore que l'hélice est engendrée par un point qui s'éloigne à chaque instant d'un plan perpendiculaire au cylindre, d'une quantité proportionnelle à l'arc parcouru par sa projection sur ce plan. La distance *am* entre deux intersections successives de la courbe avec la même génératrice, se nomme le *pas de l'hélice*, et la portion de courbe *abcm* correspondante à une révolution entière se nomme une *spire*. Les hélices se distinguent par la nature de la section droite du cylindre sur lequel elles sont tracées. Lorsque cette section est un cercle, on dit que l'hélice est à *base circulaire*.

150. On peut tracer aussi sur un cône des courbes qui ont de l'analogie avec les *hélices* et que l'on nomme pour cette raison *hélices coniques*. La courbe *abcd* de la *fig.* 13 est déterminée comme celle de la *fig.* 17, par cette condition qu'elle rencontre, suivant le même angle, toutes les génératrices du cône.

151. Quelques surfaces hélicoïdes ont pour directrices trois hélices ; mais, souvent aussi, on remplace une ou deux de ces courbes par d'autres conditions. Ainsi, par exemple, la surface hélicoïde représentée (*fig.* 14), a pour directrice l'hélice *abcd*, sa seconde directrice est la droite *os* que l'on peut considérer comme une hélice tracée sur un cylindre dont le rayon de la base serait égal à *zéro*. Quant à la troisième directrice (145), elle sera remplacée par cette condition, que la génératrice ferait toujours le même angle avec la droite *os*.

152. Souvent aussi, comme dans l'exemple qui est représenté (*fig.* 16), la génératrice devra, dans son mouvement,

rester constamment parallèle au plan horizontal et s'appuyer sur deux hélices de même pas et à bases concentriques. Ces sortes de surfaces se retrouvent dans la construction des pièces à doubles courbures qui forment les *rampes et limons* d'escaliers (*fig.* 15). Ces pièces, nommées courbes rampantes, peuvent être considérées comme engendrées par un rectangle A que l'on ferait mouvoir de manière que les sommets décriraient quatre hélices de même pas, situés sur les deux cylindres concentriques engendrées par les droites qui forment les deux côtés verticaux du rectangle générateur. Il résulte de là que la courbe rampante ou limon est comprise entre les deux surfaces cylindriques dont nous venons de parler, et les deux surfaces réglées hélicoïdes engendrées par les côtés horizontaux du rectangle A.

153. **Étude des surfaces courbes.** Le mode de génération d'une surface étant adopté, la Géométrie descriptive fournit les moyens de résoudre les questions suivantes :

1° *Représenter sur l'épure la surface dont la définition est donnée;*

2° *Exprimer qu'un point ou une ligne fait partie de la surface donnée;*

3° *Développer* (autant que possible). *la surface donnée en tout ou en partie;*

4° *Mener à la surface donnée des plans tangents, des normales et des surfaces normales;*

5° *Trouver l'intersection de la surface donnée par un plan;*

6° *Trouver la courbe d'intersection de la surface donnée avec toute autre surface;*

7° *Trouver l'intersection de la surface donnée, par une ligne quelconque, droite ou courbe.*

154. Pour représenter sur l'épure une surface dont la définition est donnée, il suffit de savoir construire la génératrice de cette surface dans une position quelconque.

155. Pour étudier une surface, on la suppose ordinairement infinie. On peut toujours, dans l'application, négliger toutes les parties de cette surface, qui ne sont pas utiles pour résoudre la question proposée.

Quelquefois, la surface est infinie dans ses deux dimensions, comme le plan en général et les cylindres et cônes qui ont pour directrices des courbes infinies; d'autres fois elle n'est infinie que dans un sens, comme le cylindre et le cône, lorsque leur directrice est une courbe fermée; enfin elle peut être finie en tous sens, comme la surface de la sphère.

156. En construisant un certain nombre de génératrices, et sur chacune d'elles les points suivant lesquels elle perce les plans de projection, on obtient les *traces de la surface*. Lorsque la surface est limitée, on doit construire la ligne qui limite sa projection; on obtient cette courbe en cherchant la suite des points suivant lesquels la surface donnée est touchée par une autre surface perpendiculaire au plan de projection. Ainsi, dans les cylindres et cônes, les limites sont situées dans des plans tangents aux courbes directrices, et perpendiculaires aux plans de projection. La limite de la projection de la sphère est la trace d'un cylindre perpendiculaire au plan de projection et enveloppant la sphère.

157. Sur les épures d'étude on place quelquefois les données dans une position inclinée par rapport aux plans de projection, mais on n'agit ainsi que pour exercer davantage aux constructions graphiques. Dans les applications, on doit toujours, avant tout, choisir le système de plans coordonnés ou de plans auxiliaires sur lesquels les projections sont les plus simples, et pourvu que l'on ne change rien aux données ni à leur position relative, la généralité de la question n'en est pas moins complète. Il ne faut pas oublier surtout, que *le choix des plans de projections est une des parties les plus essentielles de la solution des problèmes.*

158. Pour exprimer qu'un point fait partie d'une surface, on place ce point sur l'une des génératrices, ou sur toute autre ligne située dans cette surface, et dont on sait construire les projections : en agissant de la même manière à l'égard de tous les points d'une courbe, on exprime que cette courbe est située dans la surface.

159. *Tangentes.* Quand on considère une ligne courbe comme composée d'une infinité de côtés, cela ne veut pas dire que l'on

soit autorisé à regarder chacun d'eux comme un point unique; on doit plutôt admettre que ce sont de petits côtés de polygones dont les extrémités se sont tellement rapprochées, que leurs longueurs se trouvent réduites à zéro; de sorte que la direction de chacun de ces côtés reste déterminée, et c'est le prolongement de cette direction qui produit la tangente.

160. Les mêmes raisonnements s'appliquent aux surfaces courbes. En considérant ces espèces de surfaces comme composées d'une infinité de petites facettes, il ne faut pas regarder chacune d'elles comme un point unique, mais comme la réunion de plusieurs points rapprochés, de manière qu'ils n'occupent pas plus de place qu'un seul, en conservant toutefois cette condition que tous ces points n'ont pas cessé d'être dans un même plan. De sorte que si l'on conçoit une droite passant par deux quelconques de ces points infiniment rapprochés, la direction de cette ligne n'en sera pas moins déterminée, et assujettie à se confondre avec le prolongement de la facette infiniment petite qui contient ces deux points. Or cette facette ainsi prolongée n'est autre chose que le plan tangent; d'où il suit que *si en un point d'une surface courbe on conçoit un plan tangent, ce plan contiendra les tangentes à toutes les courbes qui, dans la surface, passeraient par le point de tangence.*

161. Les considérations qui précèdent étant admises, la construction des plans tangents en un point d'une surface courbe se réduit aux deux opérations suivantes :

1° *Construire par le point donné deux tangentes à la surface;*

2° *Faire passer un plan par ces deux droites.*

Il n'y a plus pour chaque cas particulier qu'à choisir, parmi toutes les courbes qui passeraient par le point donné, celles auxquelles il est le plus facile de mener des tangentes.

162. Pour obtenir une *normale*, il suffit de construire par le point de tangence une perpendiculaire au plan tangent. Tout plan qui contient la normale se nomme *plan normal*; la section de la surface par ce plan se nomme *section normale*. Si l'on fait tourner le plan normal autour de la normale, on obtient une suite de sections dont la courbure est différente pour chacune des positions du plan coupant. On démontre dans les traités de

géométrie analytique que la section qui a le plus grand rayon de courbure, est toujours perpendiculaire à celle qui a la plus petite courbure. Quelquefois la courbure des sections normales qui passent par un point donné est constante.

La véritable grandeur d'une courbe plane peut toujours être obtenue par un rabattement, mais il est évident que ce moyen ne convient plus lorsqu'il s'agit d'une courbe à double courbure. Nous verrons bientôt comment il faut s'y prendre pour tracer ces sortes de lignes sur les pièces de bois ou sur les pierres, mais il faut auparavant que nous entrions dans quelques détails sur la manière d'en obtenir les projections.

163. **Courbes de pénétration ou d'intersection**. Lorsque des voûtes cylindriques, sphériques ou coniques, se rencontrent mutuellement, la ligne de pénétration est formée de pièces dont les arêtes sont souvent à double courbure, et la détermination de ces arêtes revient alors à chercher la courbe d'intersection de deux surfaces. Or, cette courbe étant la ligne qui contient tous les points communs aux deux surfaces données, il est évident que la question proposée revient à trouver un de ces points. Car, en recommençant l'opération, on trouvera un second point commun ; une troisième opération, semblable aux deux premières, déterminera un troisième point commun ; et, lorsqu'on aura ainsi obtenu un nombre suffisant de points, assez rapprochés les uns des autres, on fera passer par tous ces points une courbe qui sera la ligne d'intersection des deux surfaces données. Voyons d'abord ce qu'il faudrait faire pour obtenir un point commun.

164. Exprimons les deux surfaces données par A et par B (*fig.* 9), on les coupera par une troisième surface que nous nommerons S, et qui n'est pas indiquée sur la figure. Cette surface auxiliaire S coupera la surface A suivant une ligne *a*, que l'on construira par les procédés ordinaires de la Géométrie descriptive (69). On construira également les lignes *b*,*b*, suivant lesquelles la surface B est coupée par la surface auxiliaire S. Les lignes *a* et *b*,*b* étant toutes situées dans la surface S, se couperont suivant un ou plusieurs points *m*,*m*,*m*,*m*, qui appartiendront aux deux surfaces proposées, puisqu'ils seront en

même temps sur les lignes *a* et *b*,*b* faisant partie de ces surfaces. Une deuxième surface auxiliaire coupera les deux surfaces données suivant d'autres lignes dont les intersections détermineront encore d'autres points communs. Une troisième surface déterminera de nouveaux points communs, et ainsi de suite ; et lorsqu'on aura obtenu un assez grand nombre de points communs, on fera passer par tous ces points une courbe qui sera la ligne de pénétration demandée.

165. La solution générale du problème étant trouvée, il ne reste plus qu'à choisir, dans chaque cas particulier, le système de surfaces auxiliaires qui conduit aux opérations les plus simples. On emploie presque toujours des plans pour surfaces auxiliaires ; de sorte que toutes les constructions des lignes *a* et *b* reviennent à déterminer les courbes suivant lesquelles ces plans coupent les surfaces données (69), et la construction de ces lignes peut souvent être considérablement simplifiée par la direction que l'on adoptera pour les plans coupants auxiliaires. Ainsi :

166. **Intersection de deux cylindres.** Pour avoir un point de la courbe suivant laquelle se pénétreraient les deux cylindres A et B de la *fig.* 8, on pourra les couper par un plan parallèle à leur direction ; ce plan coupera le cylindre A suivant deux de ses génératrices *a*,*a*. Ce même plan auxiliaire coupera le cylindre B suivant deux génératrices *b*,*b*, et les droites *a*,*a*,*b*,*b* étant situées toutes les quatre dans le plan auxiliaire, se couperont en quatre points *m*,*m*,*m*,*m* qui feront partie de la courbe suivant laquelle les deux cylindres se pénètrent. Dans certains cas, cette courbe peut être plane comme on le voit (*fig.* 7).

167. **Intersection d'un cylindre et d'un cône.** Pour obtenir la courbe suivant laquelle le cône A (*fig.* 10) est pénétré par le cylindre B, on coupera ces deux surfaces par des plans parallèles au cylindre et passant par le sommet du cône. Ces plans couperont le cône suivant deux génératrices *a*,*a*, et le cylindre suivant les deux génératrices *b*,*b* ; et les droites *a*,*a*,*b*,*b*, situées toutes les quatre dans le plan coupant auxiliaire, se rencontreront suivant quatre points *m*,*m*,*m*,*m* qui appartiendront aux lignes de pénétration des deux surfaces. Tous les plans

coupants auxiliaires devront contenir la droite *sc* menée par le sommet du cône parallèlement au cylindre.

168. **Intersection de deux cônes** (*fig.* 11). On emploiera comme surfaces coupantes des plans passant par les deux sommets, et contenant par conséquent la droite *sc* qui joint ces deux points.

169. **Intersection d'une sphère et d'un cylindre.** Pour obtenir les courbes suivant lesquelles un cylindre A (*fig.* 12) pénètre dans une sphère B, on coupera ces deux surfaces par des plans parallèles au cylindre. Ces plans couperont le cylindre suivant deux génératrices *a*,*a*, et la sphère suivant un cercle *b*; et les intersections du cercle obtenu dans la sphère par les deux génératrices du cylindre détermineront les quatre points communs *m*,*m*,*m*,*m*.

170. **Intersection d'une sphère et d'un cône.** Pour obtenir la courbe d'intersection suivant laquelle le cône A (*fig.* 18) traverse la surface de la sphère B, on coupera ces deux surfaces par des plans contenant le sommet du cône. Ces plans couperont alors le cône suivant deux génératrices *a*,*a*, et la sphère suivant un cercle *b*, et les points suivant lesquels le cercle *b* de la sphère est coupé par les deux génératrices *a*,*a* du cône, détermineront les quatre points *m*,*m*,*m*,*m* sur les courbes de pénétration.

171. Dans tout ce qui vient d'être dit, nous avons considéré les surfaces sous un point de vue purement géométrique, c'est-à-dire que nous avons fait complétement abstraction de l'épaisseur des corps auxquels ces surfaces appartiennent; mais il est évident que dans la pratique et surtout dans les applications à la coupe des pierres ou à la charpente, il faudra tenir compte de l'épaisseur des pans de bois ou des voûtes dont les surfaces, par leurs intersections mutuelles, formeront les arêtes des pièces courbes, planes ou à double courbure, qui doivent exister à leur rencontre. J'ai indiqué en perspective sur les *fig.* 8, 9, 10, 11, 12 et 18, les épaisseurs de quelques-unes de ces pièces courbes dont les arêtes pourront toujours être obtenues par le principe précédent.

172. **Épures.** On vient de voir combien la nature des sur-

faces coupantes auxiliaires peut simplifier la recherche des points communs à deux surfaces données, et par suite la construction des courbes de pénétration. Mais le choix des plans de projection étant peut-être encore plus important pour l'exécution des épures, nous allons consacrer une ou deux planches à cette étude, que l'on pourra considérer comme un résumé rapide des principes de géométrie descriptive qui sont le plus fréquemment employés dans la pratique.

CHAPITRE V.

Disposition des épures.

173. **Courbes à double courbure.** Une courbe à double courbure étant, comme nous l'avons dit précédemment, déterminée par ses deux projections, on peut se proposer de la développer, de la rectifier, de lui construire des tangentes, des normales ou des plans normaux. Soient, par exemple, 1'...6' (*fig.* 1, *pl.* 8) la projection verticale et 1....6 (*fig.* 2) la projection horizontale d'une courbe quelconque. Si l'on partage la projection horizontale en un assez grand nombre de parties pour que l'on puisse sans erreur sensible considérer chacune d'elles comme une ligne droite ; si on porte tous ces petits arcs à la suite les uns des autres, comme on le voit (*fig.* 3), la ligne 1''—1'' que l'on obtiendra sera le développement de la projection horizontale de la courbe.

Supposons actuellement que par chacun des points de 1''...1'', on élève sur la droite que l'on vient d'obtenir une perpendiculaire égale à la distance du point correspondant de la courbe donnée au plan horizontal de projection (*fig.* 1), et que par les extrémités de ces perpendiculaires on fasse passer une courbe 1'''.....1''', on aura le développement du cylindre projetant ver-

tical. La ligne $1'''....1'''$ représente ce que la courbe donnée devient dans ce développement. Enfin, prenant les arcs $1'''—2'''$, $2'''—3'''$, $3'''—4'''$, etc., et portant leur longueur en ligne droite et à la suite les uns des autres (*fig.* 4), on obtiendra la courbe dans sa véritable longueur. C'est ce qu'on appelle *rectifier une ligne courbe.*

174. Si l'on voulait obtenir les projections des points qui, à partir du point 1, partageraient la courbe donnée en cinq parties égales, on partagerait la ligne droite $1^{\text{IV}}...1^{\text{IV}}$; ce qui donnerait quatre points A^{IV}, B^{IV}, C^{IV}, D^{IV}, que l'on reporterait d'abord en A''', B''', etc., sur le développement $1'''—1'''$ (*fig.* 3), d'où l'on déduirait facilement les points A'',B''..... qui, reportés eux-mêmes en A,B,C, etc., sur la projection horizontale de la courbe, donneraient les projections verticales A', B', C', etc. On emploierait le même moyen pour partager une courbe quelconque en tout autre nombre de parties égales ou ayant entre elles des rapports donnés.

175. **Tangentes aux courbes à double courbure.** Soient (a,a') (*fig.* 6) les deux projections d'une courbe, le point de tangence (m,m') étant donné. Concevons par le point m' une tangente à la projection verticale de la courbe, on pourra considérer cette tangente comme la trace d'un plan p' perpendiculaire au plan vertical de projection et tangent au cylindre projetant horizontal. Or ce plan doit contenir la tangente à la courbe; de plus, cette tangente doit être située dans le plan p, tangent à la surface projetante perpendiculaire au plan horizontal. Donc la tangente cherchée devant faire partie des deux plans p et p', sera leur intersection, d'où l'on voit que, *pour construire une tangente en un point donné d'une courbe quelconque, il suffit de construire par les projections du point donné deux tangentes aux projections de la courbe. Ces lignes seront les projections de la tangente à la courbe.*

176. **Plan normal.** Tout plan p'' passant par le point de tangence et perpendiculaire à la tangente, sera perpendiculaire à la courbe, et prendra pour cette raison le nom de *plan normal à la courbe.* La tangente étant perpendiculaire au plan normal sera perpendiculaire à toutes les droites qui passeraient

par son pied dans ce plan. Il semblerait donc permis de considérer chacune de ces lignes comme une normale à la courbe. Cela ne serait pas exact, parce que *la normale en un point d'une courbe à double courbure doit être située dans le plan osculateur de cette courbe.* D'où il résulte que la normale *mn* (*fig.* 5) sera l'intersection du plan normal par le plan osculateur. On sait que le plan osculateur est celui qui contiendrait le point *m* et deux autres points *v*,*u* infiniment près du premier.

177. **Projections des hélices.** Parmi les courbes qui nous seront les plus utiles, nous devons surtout distinguer les hélices dont nous avons déjà parlé aux nos 149 et 150. Nous consacrerons quelques lignes à la construction de ces courbes.

178. Supposons (*fig.* 11) que la circonférence 1—2—3... soit la base ou projection horizontale d'une hélice dont le pas serait 0—8; on partagera cette droite et la circonférence en un même nombre de parties égales, en 8 par exemple; on tracera ensuite une horizontale par chacun des points de division de la verticale 0—8. Si l'on suppose actuellement que le point générateur, partant de 0, tourne dans le sens de l'arc 1—2—3, etc., il est évident que lorsqu'il sera parvenu sur la verticale du point 1, il sera élevé, au-dessus du plan horizontal, d'une quantité égale à la huitième partie du pas, et sa projection verticale devra, par conséquent, se trouver sur la première horizontale au-dessus de la ligne AZ. Lorsque le point générateur sera parvenu sur la verticale du point 2, sa projection verticale sera élevée de 2 huitièmes du pas, et sera sur la deuxième horizontale, etc. De sorte que tous les points de la projection verticale de la courbe seront déterminés par les intersections des verticales élevées par les 8 points de division de la circonférence 0—1—2—3 avec les horizontales passant par les 8 points de division de la verticale 0—8.

179. On peut développer la surface cylindrique, qui contient l'hélice, en opérant comme nous l'avons dit au no 173. Ainsi la circonférence 0—1—2... étant partagée en parties égales on aura (*fig.* 10) 0—1=1—2=2—3, etc. De plus, les côtés 1—1′, 2′—2″, 3″—3‴ devant être égaux par suite de la définition de l'hélice, il s'ensuit que les triangles 0—1—1,

1′—2′—2″, etc., seront égaux, et que leurs angles seront égaux; de sorte que, l'hélice coupant suivant un angle constant toutes les génératrices parallèles du cylindre, on peut en conclure que dans le développement (*fig.* 10), *cette courbe se transformera toujours en ligne droite.*

180. On peut quelquefois se servir avec avantage de ce développement pour construire la projection de la courbe. Dans ce cas, on fera la droite 8—8″ égale à la hauteur du pas de l'hélice, puis après avoir tracé l'oblique 0—8″ on partagera cette ligne et la circonférence de la base du cylindre en autant de parties égales que l'on voudra obtenir de points sur la courbe, puis tous ces points seront déterminés par les intersections des verticales élevées par les points de division de la circonférence 0—1—2.... avec les horizontales passant par les points de l'oblique 0—8″ (*fig.* 10). Lorsqu'on prend ainsi une oblique pour échelle de hauteur, il n'est pas nécessaire que la droite 0—8 (*fig.* 13) soit égal au développement de la circonférence 0—1—2... (*fig.* 11). Il suffit que la verticale 8—8′ ou 8′—8″ soit égale à la hauteur du pas de l'hélice que l'on veut projeter. De sorte que les 8 parties égales de l'oblique 0—8′ (*fig.* 13) détermineront les hauteurs des 8 points correspondants de la première spire.

181. Lorsqu'une hélice se compose d'un très-grand nombre de spires, on peut construire avec beaucoup de soin (*fig.* 15) la projection de l'une de ces courbes sur une carte que l'on découpera, et qui, étant rapportée à toutes les hauteurs, servira pour guider le crayon. Enfin, lorsque l'on veut tracer un arc d'hélice sur un cylindre, il suffit de déterminer (*fig.* 14) deux points *m* et *n* de la courbe demandée; après quoi il sera facile de la tracer avec une règle flexible à laquelle on fera prendre la courbure de la surface. Quoique deux points suffisent, dans ce cas, pour déterminer la courbe, on fera bien cependant de tracer sur le cylindre un ou deux points intermédiaires pour servir comme vérification.

182. Il peut arriver que l'on ait à tracer sur un même cylindre (*fig.* 7) plusieurs hélices de même pas, mais situées à des hauteurs différentes. Dans ce cas, il ne sera pas nécessaire d'é-

tablir sur la projection du cylindre de nouvelles horizontales, ce qui ferait confusion. Il sera préférable de porter avec le compas sur la verticale projetante de chaque point, la différence de hauteur entre la première hélice et celle que l'on veut obtenir. Si l'on veut construire plusieurs hélices de même pas et à la même hauteur sur des cylindres concentriques (*fig.* 8), tous les points seront determinés en élevant des perpendiculaires par les points correspondants des cercles qui représentent les projections horizontales des hélices demandées.

183. **Tangentes à l'hélice.** On sait que, dans le voisinage du point de tangence, une courbe se confond toujours avec sa tangente. De plus, l'hélice devant se développer en ligne droite, elle devra, dans le développement du cylindre, continuer à se confondre avec sa tangente. D'où il résulte que la tangente coïncidant avec la courbe développée doit être l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dont la hauteur est à la base comme le pas de l'hélice est au développement de la circonférence du cercle qui en forme la projection, ou, ce qui est la même chose, comme un certain nombre de parties égales du pas est à un pareil nombre de parties égales de la circonférence de la base.

Supposons donc que l'on veuille construire une tangente au point u,u' de l'hélice $1-2-3-4$ (*fig.* 9), on construira d'abord la tangente $u-m$. Cette droite sera la trace horizontale du plan tangent au cylindre qui contient l'hélice, de sorte que si l'on fait $u-m$ égale à $\frac{1}{16}$ de la circonférence, et que $m'-o'$ soit égal à $\frac{1}{16}$ du pas de l'hélice, l'hypoténuse $m'-u'$ sera la projection verticale de la tangente au point uu'. Il résulte de ce qui précède qu'il n'est pas nécessaire que la courbe soit tracée pour que l'on puisse construire sa tangente.

Le plan p mené par le point uu' et perpendiculaire à la tangente $mu,m'u'$, sera *normal* à l'hélice donnée.

184. **Projection du cylindre oblique.** Dans les articles précédents nous avons considéré les cylindres comme surfaces projetantes, mais il arrive souvent qu'un cylindre est oblique par rapport aux plans de projection. Or une surface cylindrique est déterminée lorsque l'on connaît les projections de sa directrice et celles d'une génératrice ou d'une droite quelconque qui

lui serait parallèle. Car il sera toujours facile de construire une génératrice par tel autre point que l'on voudra de la directrice.

Si après avoir construit un nombre suffisant de génératrices, on détermine les points suivant lesquels ces droites percent l'un des plans de projection, la ligne passant par ces points sera la trace du cylindre. Ainsi, la courbe 1—2—3—4 est la trace horizontale du cylindre qui est projeté (*fig.* 18 et 19). La trace verticale s'obtendrait en prolongeant les génératrices jusqu'à ce qu'elles rencontrent le plan vertical de projection.

185. **Directrice.** On peut supposer pour plus de généralité que la directrice d'un cylindre est une courbe quelconque; mais, dans les applications, on prend presque toujours pour directrice une courbe parallèle à l'un des plans de projection. Ces sortes de courbes sont égales et parallèles aux traces, et se construisent de la même manière. Ainsi, par exemple, pour obtenir la courbe N (*fig.* 19), il suffira de projeter tous les points suivant lesquels le plan horizontal *nn'* coupe les génératrices du cylindre.

186. Dans les questions composées il est souvent nécessaire de construire un grand nombre de génératrices, et dans ce cas, pour plus d'ordre dans le travail, on les distingue par des numéros. Il ne faut pas, cependant, construire de suite et sans nécessité un trop grand nombre de génératrices. Il n'est pas nécessaire, par exemple, que ces lignes soient aussi rapprochées les unes des autres dans les parties où la surface a peu de courbure; mais on fera bien de tracer, au moins au crayon, celles qui correspondent aux points les plus essentiels de la surface. On devra s'attacher surtout à déterminer avec exactitude les génératrices qui forment les limites des projections de la surface. Ainsi (*fig.* 16), les génératrices des points 3 et 7, suivant lesquels le cylindre serait touché par deux plans verticaux, forment les limites de la projection horizontale, et les génératrices des points 1 et 5 suivant lesquelles la surface serait touchée par deux plans perpendiculaires au plan vertical de projection, formeront les limites de la projection verticale du cylindre.

187. Si l'on prend la trace horizontale 1—2—3—4 pour directrice du cylindre projeté (*fig.* 19 et 18), il sera surtout es-

sentiel de déterminer avec beaucoup de soin les points 1, 2, 3, 4, parce que les génératrices qui contiennent ces points forment les limites des parties vues et cachées sur les deux projections. Ainsi, par exemple, sur la projection horizontale, la partie de surface cylindrique qui a pour directrice l'arc 1—2—3 sera vue, tandis que celle qui a pour directrice l'arc 3—4—1 doit être cachée. Sur la projection verticale, la partie vue est celle qui a pour directrice la courbe 2—1—4, et par conséquent la partie qui a pour directrice l'arc 4—3—2 est cachée.

188. Plusieurs simplifications remarquables peuvent résulter de la position du cylindre par rapport aux plans de projection. Ainsi (*fig.* 16) lorsque l'un de ces plans sera parallèle au cylindre, il en résultera cet avantage, que les génératrices seront projetées sur ce plan suivant leurs véritables grandeurs. Si l'un des plans de projection était perpendiculaire au cylindre (*fig.* 9), chaque génératrice se projetterait sur ce plan par un seul point, et la projection du cylindre se réduirait à sa trace, qui serait en même temps la directrice.

189. **Section droite, développement du cylindre.** Parmi les sections d'un cylindre par un plan, il faut distinguer surtout celle que l'on obtient en coupant le cylindre perpendiculairement aux génératrices. Cette courbe, que nous nommerons la *section droite du cylindre*, est utile dans un grand nombre d'applications. Supposons, par exemple, que l'on veuille développer une surface cylindrique (*fig.* 16). Il faudra opérer comme nous l'avons fait au n° 77 pour obtenir le développement d'un prisme. Ainsi, on projettera le cylindre proposé sur un plan parallèle à ses génératrices, afin d'avoir toutes ces lignes projetées dans leur véritable longueur; menant ensuite par un point quelconque *a* un plan perpendiculaire à ces génératrices, la ligne *ac* sera la projection verticale de la *section droite*.

Lorsque cette courbe sera rabattue en M, on portera tous les petits arcs dont elle se compose, à la suite les uns des autres, sur la ligne droite $c'a'c'$; on élèvera, par chacun des points de division de cette ligne, une perpendiculaire égale à la génératrice correspondante de la surface cylindrique que l'on se pro-

posera de développer; puis, faisant passer deux courbes 1′—*a*′—1′, 1″—*a*″—1″ par les extrémités de ces perpendiculaires, on aura construit le développement de la surface du cylindre. La droite *c′a′c′* est *la section droite rectifiée* (173). Pour obtenir sur le développement la position d'un point déterminé *uu′*, on construira la génératrice correspondante sur les deux projections, d'où il sera facile de déterminer sa position sur le développement du cylindre.

190. Si le cylindre que l'on veut développer n'était pas parallèle à l'un des plans de projections, on commencerait par le projeter (*fig.* 20) sur un plan auxiliaire A′Z′ parallèle à sa direction, et cette nouvelle projection remplaçant la projection verticale primitive, on agirait exactement pour le reste comme nous l'avons dit dans l'exemple précédent. Si un point était donné par sa projection verticale *u′* et qu'on voulût déterminer la position de ce point sur le développement du cylindre, on commencerait par construire la projection horizontale *u* de ce point, d'où on déduirait la projection *u″* sur le plan auxiliaire; puis après s'être assuré que les deux projections *u′* et *u″* sont à la même hauteur, on ramènerait ce point sur la génératrice correspondante du développement (*fig.* 21) par une parallèle à la droite *c′a′c′*. On opérerait de la même manière pour obtenir dans le développement tous les points d'une courbe située sur la surface du cylindre et qui serait donnée par l'une quelconque de ses deux projections.

191. Les constructions que nous venons d'indiquer consistent à regarder le cylindre comme un prisme dont la surface se composerait d'un très-grand nombre de faces, hypothèse qui n'est pas tout à fait exacte, mais qui suffit pour la plus grande partie des applications. D'ailleurs, lorsque la courbure d'un arc sera très-sensible, on pourra prendre sur cet arc des points plus rapprochés, et, par cette précaution, on parviendra toujours à développer la section droite, de manière à rendre les erreurs tout à fait insignifiantes.

192. Si la section droite était un cercle (*fig.* 10 et 11), on pourrait opérer comme nous l'avons dit au n° 78, et si l'on avait à développer un grand nombre de cylindres circulaires, on

pourrait conserver dans son portefeuille ou sur une planche à dessin (*fig.* 32) un triangle *cab*, dans lequel les deux côtés *ac*, *ab* seraient entre eux comme 1 : 3,14 ou, ce qui est la même chose, comme 100 : 314. Alors, pour développer un cylindre qui aurait pour base la circonférence N (*fig.* 33), on fera, sur la fig. 32, *ac'* égal à *a''c''*; puis on tracera *c'b'* parallèle à *cb*, ce qui donnera *ab'* pour la longueur de la circonférence N. Si ensuite on fait *as* égal à la hauteur du cylindre donné, le rectangle *sab'h* sera le développement, sur lequel on pourra ensuite tracer les génératrices à des distances égales ou inégales, suivant la nature de la question.

193. **Cylindre circulaire.** S'il s'agissait de construire les projections d'un cylindre circulaire terminé par deux bases perpendiculaires à sa direction, les propriétés du cercle donneraient lieu à des simplifications qu'il serait utile de ne pas négliger. Supposons, par exemple, que l'on veuille projeter (*fig.* 39 et 40) un cylindre circulaire incliné par rapport au plan horizontal de projection; que les droites *ac*,*a'c'* soient les deux projections de l'axe de ce cylindre, et que le rayon de sa base soit connu. Le moyen le plus simple sera de projeter le cylindre sur un plan vertical AZ parallèle à l'axe et par conséquent à la direction du cylindre demandé. Le rayon *a'x'* étant donné par la question, les deux droites *m'x'*, *z'o'*, perpendiculaires sur *a'c'* seront les projections des deux bases, et le rectangle *m'x'z'o'* sera la projection du cylindre sur le plan vertical AZ.

Quant à la projection horizontale, elle sera limitée par les deux droites *hk*,*h'k'* parallèles à la ligne AZ, et dont l'écartement *hh'* sera déterminé par le diamètre du cylindre. Enfin, les deux bases *m'x'*, *z'o'* auront pour projections les deux ellipses *hh'*, *kk'*, dont les grands axes sont égaux au diamètre du cylindre, et qui ont pour petits axes les deux droites *mx*, *zo*, projections horizontales des diamètres *m'x'*, *z'o'*. La courbe *mn*, trace horizontale du cylindre, est une ellipse que l'on pourra construire par ses axes.

194. On pourrait prendre pour directrice du cylindre la base *mx* ou la trace *mn*, mais il vaudra mieux employer pour cet usage le cercle *mv*, représentant la base *m'x'* que l'on aurait

fait tourner autour de l'horizontale *mm'* jusqu'à ce qu'elle soit rabattue dans sa véritable grandeur sur le plan horizontal de projection. En général, lorsqu'un cercle fait partie des lignes nécessaires à la solution d'un problème, on préfère le rabattre, afin d'éviter la construction de l'ellipse qui résulterait de sa projection. Enfin, si par le point *v* on mène la droite *vv'* perpendiculaire à AZ, on déterminera sur le cylindre une section oblique *m'v'* qui aurait pour projection horizontale la circonférence *mv*. Cette courbe très-simple, puisque ses projections seront une ligne droite et un cercle, pourra encore servir de directrice à la surface proposée.

Ainsi on pourra, selon les circonstances, prendre pour directrice du cylindre circulaire la base *mx*, la trace *mn*, la circonférence *mv*, qui est la base rabattue sur le plan horizontal de projection, ou enfin la section oblique *m'v'*, qui a pour projection horizontale la circonférence *mv*. C'est principalement lorsque le cylindre sera parallèle à l'un des plans de projection que l'usage de cette dernière directrice sera très-commode. Au lieu de la section *mv*, *m'v'*, on pourrait prendre pour directrice la section par l'un des deux plans *p''* ou *p'''* dont les directions seront déterminées par les deux verticales tangentes aux points *r* et *s* d'un cercle quelconque inscrit à la projection horizontale du cylindre.

195. La comparaison des lignes diverses que l'on peut prendre pour directrices d'un cylindre circulaire donne lieu à des simplifications remarquables, suivant les différents problèmes à la solution desquels elles doivent concourir. Ainsi, pour exprimer qu'un point *uu'* appartient à la surface du cylindre, on construira les projections de la génératrice qui passe par ce point, le pied 1, 1' de cette génératrice sera situé sur la courbe que l'on aura choisie pour directrice.

196. Aux abréviations provenant de la nature des courbes qui peuvent être tracées sur une surface, il faut ajouter celles plus importantes encore qui résultent du choix des plans de projection. En effet, ces plans ne sont autre chose que des conceptions géométriques adoptées par convention, pour faciliter la solution des problèmes. Ils doivent donc rester entièrement à

la disposition de celui qui opère, et pourvu qu'on ne change rien aux données ni à leur position relative, la généralité de la question n'en sera pas moins complète. J'insiste particulièrement sur cette remarque, parce que c'est surtout dans le choix des moyens d'opération que consiste toute l'habileté du praticien. Il faut donc s'appliquer à reconnaître, dans chaque question générale, quelle doit être la disposition d'épure la plus commode, et dans chaque cas particulier, quelles sont les relations qui, résultant de la nature des données, peuvent contribuer à simplifier le travail ou augmenter l'exactitude du résultat.

CHAPITRE VI.

Pénétration des surfaces.

197. **Intersections des cylindres.** *Trouver la courbe provenant de l'intersection de deux cylindres* (166). Soient (*fig.* 24 et 27) les deux cylindres dont on demande l'intersection. Par un point quelconque (m, m'), on construira deux droites parallèles aux génératrices des cylindres donnés ; ces deux droites détermineront un plan mvo parallèle aux deux cylindres. Or, tout autre plan p parallèle au plan mvo coupera le cylindre AA' suivant deux de ses génératrices désignées sur l'épure par (a, a). Le même plan coupera le cylindre BB' suivant deux génératrices (b. b). Ces quatres lignes étant dans un même plan, donneront par leurs intersections quatre points (u, u, u, u) appartenant à la courbe cherchée. On obtiendra les projections verticales u', u', u', u' de ces points, en projetant les génératrices qui les contiennent. Un second plan parallèle au plan mvo, et par conséquent parallèle aux deux cylindres, déterminera quatre nou-

veaux points. Un troisième plan en donnera quatre autres, et ainsi de suite. Enfin on continuera ces opérations jusqu'à ce que l'on ait obtenu un nombre de points suffisant pour que l'on puisse tracer la courbe avec beaucoup d'exactitude.

198. On fera bien de commencer par la recherche de quelques points essentiels, de ceux surtout qui, par leur position, pourraient donner une première idée de la forme de la courbe. On chercherait ensuite des points intermédiaires dans les parties où la courbure deviendrait plus sensible. On devra surtout ne pas négliger les points suivant lesquels la courbe cherchée doit toucher les génératrices principales. Ainsi, pour avoir les points qui appartiennent aux limites des projections verticales et horizontales des deux cylindres, on emploiera les plans coupants dont les traces passeraient par les pieds des génératrices qui forment ces limites.

199. Il n'est pas nécessaire de construire de plan coupant hors de l'espace compris entre les plans dont les traces toucheraient celles des cylindres donnés, parce que tout plan hors de cet espace couperait l'un des cylindres sans toucher ni couper l'autre, et par conséquent ne contiendrait pas de points communs. Lorsque la courbe sera entièrement obtenue, on regardera comme vu, tout point provenant de l'intersection de deux génératrices vues. Tous les autres points sont cachés ; on tracera en ligne pleine toute la partie de la courbe qui contient les points vus et le reste en ligne ponctuée.

200. **Tangentes aux courbes d'intersection.** Pour construire la tangente en un point quelconque de la courbe, on peut, comme nous l'avons dit au n° 175, construire par les projections de ce point, des tangentes aux deux projections de la courbe ; mais cela ne peut se faire que lorsque ces projections sont connues ; or la construction de la tangente a souvent pour but de donner plus de précision à la forme de la courbe, et de faire disparaître l'incertitude qui existe sur sa direction dans le voisinage du point de tangence. Il faut donc que l'on puisse construire la tangente avant que les projections de la courbe ne soient tracées. Dans ce cas, on remarquera que la tangente devant toucher les deux cylindres donnés, il

faut qu'elle soit située en même temps dans les plans tangents à ces deux surfaces, d'où il résulte qu'elle doit être l'intersection de ces plans; ainsi, pour obtenir une tangente en un point de la courbe cherchée, on construira par ce point un plan tangent à chacun des deux cylindres, et l'intersection de ces deux plans sera la tangente demandée.

201. La construction des tangentes a beaucoup d'importance dans la recherche des courbes; en effet, si un point est déterminé par l'intersection de deux lignes *ab, cd* (*fig.* 17), cela ne donnera aucune idée de la direction de la courbe, en deçà ou au delà du point dont il s'agit, tandis que la tangente fait sentir la direction de la courbe dans le voisinage du point de tangence, et l'on conçoit parfaitement comment, par la construction d'un certain nombre de tangentes (*fig.* 38), on pourra déterminer, avec une exactitude presque absolue, les changements et variations de courbure de la ligne cherchée.

202. *Développements.* Si on veut tracer la courbe d'intersection dans les surfaces des deux cylindres, il faudra projeter chacun d'eux sur un plan parallèle à ses génératrices; on obtiendra par ce moyen les deux projections auxiliaires A'' et B'' (*fig.* 28 et 30); puis on construira les sections droites A''' et B''', et les développements A^{IV} B^{IV}, en opérant comme nous l'avons dit au n° 190. Il sera très-essentiel de s'assurer que tous les points correspondants des deux cylindres et de la courbe d'intersection sont à la même hauteur sur les trois projections verticales A'B', A'' et B''. Pour tracer les courbes de pénétration sur les cylindres donnés, on enveloppera sur ces corps les figures A^{IV} et B^{IV}.

203. Quelquefois l'un des cylindres pénètre dans l'autre et s'y trouve entièrement engagé; alors l'intersection se compose de deux courbes séparées, l'une d'entrée et l'autre de sortie, comme on le voit (*fig.* 25); dans ce cas, on dit qu'il y a *pénétration*. Mais si l'un des deux cylindres n'était pas tout à fait engagé dans l'autre, l'intersection se nommerait *arrachement* (*fig.* 22). Dans la question que nous venons de résoudre, il y avait arrachement.

204. 2e *exemple de l'intersection des cylindres.* Il est presque

toujours possible d'éviter la plus grande partie des opérations précédentes en faisant usage de plans de projection plus favorablement disposés par rapport aux deux cylindres dont on veut construire la pénétration. Dans ce but, on placera (*fig.* 43 et 44) l'un des cylindres A perpendiculairement à l'un des plans de projection que nous supposerons ici être le plan horizontal, et l'on prendra le second plan de projection parallèle en même temps aux deux cylindres. Par suite de cette disposition d'épure, le système de plans coupants auxiliaires sera parallèle au plan vertical. Chacun de ces plans coupera le cylindre A suivant deux droites verticales, et le cylindre B suivant deux génératrices. Les intersections de ces lignes détermineront, comme précédemment, tous les points cherchés. Les *fig.* B″ et B‴ forment le développement du cylindre B, et A″ est le développepement de la partie du cylindre A qui a pour directrice la courbe *aco*.

205. Quand les deux cylindres proposés seront circulaires, la trace du cylindre A sera une circonférence de cercle, et cette courbe servira en même temps de section droite au cylindre; quant au cylindre B, il aurait pour trace une ellipse, mais on pourra, comme nous l'avons dit au n° 194, éviter la construction de cette courbe en employant, comme directrice, la circonférence *vu‴* qui sera la base *v'u'* rabattue sur le plan horizontal *v'u″*.

206. Il n'est pas toujours possible d'adopter entièrement la disposition d'épure qui précède. Ainsi, dans la construction des voûtes en descente (*fig.* 52, 50, 53), on peut bien prendre un plan vertical de projection perpendiculaire au cylindre principal AA′, mais les voûtes inclinées BB′ et CC′ devant conserver leur position, le second plan de projection qui, pour satisfaire aux conditions de l'équilibre, doit rester horizontal, ne sera pas parallèle aux axes des cylindres, mais cela n'augmente pas la difficulté pour la recherche de la ligne de pénétration, que l'on obtiendra en coupant les cylindres donnés par des plans perpendiculaires au plan vertical de projection.

Pour obtenir les points de la courbe 1—2—1 suivant laquelle

la voûte principale AA′ est pénétrée par la voûte inclinée BB′, on coupera les cylindres par un plan *m′c′*, perpendiculaire au plan vertical de projection (*fig.* 50). Ce plan coupera le cylindre A, suivant la génératrice *aa* et le cylindre B suivant deux droites *b*, *b*. Les intersections de ces lignes détermineront les deux points *m*,*m* qui auront le point *m′* pour projection verticale commune. Cette opération recommencée fera connaître autant de points que l'on voudra de la courbe 1—2—1. On opérera de la même manière pour déterminer les points de la courbe 3—4—3 suivant laquelle le cylindre AA′ est pénétré par le cylindre CC′. La voûte CC′ est ce que l'on nomme une *descente droite*, tandis que le cylindre BB′ est une *descente biaise*.

207. On développera le cylindre CC′ en opérant comme nous l'avons dit au n° 189, c'est-à-dire que l'on construira le plan *vu*, perpendiculaire à la direction du cylindre CC′; on obtiendra par ce moyen la section droite C″ rabattue sur le plan horizontal *vu′*, on rectifiera la section droite *v″u″v″* (*fig.* 55), et l'on construira le développement C‴ auquel on a joint ici les deux triangles D égaux à leurs projections D′ sur la *fig.* 53.

208. Pour développer le cylindre BB′, on construira : 1° la *fig.* B″, qui est une projection du cylindre B sur le plan vertical A′Z′, parallèle à sa direction (190); 2° la section droite *zx* rabattue en B‴ sur le plan horizontal *xz′*; 3° la section droite rectifiée *x″z″x″* (*fig.* 48); 4° le développement B^{IV}, auquel on a joint ici les deux triangles rectangles E, E projetés dans leur véritable grandeur sur la *fig.* 49.

La *fig.* 47 est le développement du cylindre horizontal AA′.

209. Dans l'exemple qui est représenté sur les *fig.* 34 et 35, les deux cylindres proposés étant perpendiculaires aux plans de projection, sont les deux surfaces projetantes de la courbe de pénétration. Il n'y aura donc aucune opération à faire pour obtenir cette ligne, dont les projections se confondent avec les traces des deux cylindres; lesquelles traces seront en même temps les sections droites, ce qui permettra de construire très-facilement les développements A″ et B″ (*fig.* 36 et 37). En général, lorsqu'on cherche la ligne de pénétration de deux sur-

faces, il faut prendre, autant que possible, un des plans de projection perpendiculaire à l'une des deux surfaces données, parce que cette surface devient alors l'une des deux surfaces projetantes de la courbe demandée. Or cette disposition d'épure pourra toujours être obtenue, lorsque l'une des deux surfaces données sera un plan, un prisme ou un cylindre.

210. *Surfaces coniques.* Nous avons étudié précédemment quelques-unes des propriétés du *cône circulaire ou de révolution* (69, 79, etc.); mais il est souvent utile de considérer les surfaces coniques sous un point de vue plus général. Une *surface conique* est le lieu de l'espace qui contient toutes les positions d'une ligne droite assujettie, dans son mouvement, à passer toujours par un point immobile que l'on nomme *sommet* du cône. La droite mobile se nomme *génératrice* du cône; on suppose ordinairement qu'elle doit s'appuyer sur une courbe que l'on nomme *directrice.* Lorsqu'un cône aura pour directrice une courbe du second degré, le cône sera lui-même du *second degré.* Si la directrice est une ellipse, le cône sera *elliptique* (*fig.* 1, pl. 9).

211. **Projection du cône.** La directrice d'un cône étant donnée, on prendra sur cette ligne autant de points que l'on voudra, puis on fera passer une génératrice par chacun de ces points et par le sommet du cône. Pour construire les *traces* du cône, on prolongera les génératrices jusqu'aux plans de projection. On peut prendre pour directrice d'un cône une ligne quelconque qui serait coupée par toutes les génératrices. Mais pour simplifier le travail graphique, on prend souvent pour directrice une courbe plane parallèle à l'un des plans de projection ou située dans ce plan. Si la directrice du cône est une courbe fermée, les projections de ce cône seront contenues entre certaines limites que l'on doit déterminer. Supposons, par exemple (*fig.* 1), un cône qui aurait pour directrice la courbe 1—2—3—4—5..... située dans le plan horizontal; les deux tangentes s—1, s—8 seront les limites de la projection horizontale du cône, et les deux droites s'—2′, s'—7′ seront prises pour limites de la projection verticale.

212. **Développement de la surface du cône.** On déve-

loppe la surface du cône en opérant comme pour une pyramide oblique qui aurait un grand nombre de faces. Ainsi, en prenant sur la trace du cône des points assez rapprochés, on pourra, sans erreur sensible, remplacer, par un triangle plan, la petite portion de surface conique comprise entre deux points consécutifs de la trace et les génératrices correspondantes. Tous ces triangles, construits dans leur véritable grandeur et placés à côté les uns des autres, formeront le développement s'—$1'''$—$6'''$—$1'''$ du cône projeté (*fig.* 1). Pour obtenir les génératrices dans leur véritable grandeur, on les fera tourner autour de la verticale projetante du sommet jusqu'à ce qu'elles soient parallèles au plan vertical de projection.

213. Pour construire dans le développement un point mm' appartenant à la surface du cône, on le rabattra en m'' sur la génératrice correspondante, et de là en m''' dans le développement de la surface. En recommençant cette opération pour tous les points d'une courbe quelconque qui serait située sur la surface du cône, on obtiendrait tous les points de cette courbe dans le développement.

214. Projections obliques du cône circulaire. Lorsqu'un cône circulaire, terminé par une base perpendiculaire à son axe, est projeté sur un plan parallèle à cet axe, la projection (*fig.* 3) est un triangle isocèle $s'c'c'$. Pour compléter la projection sur l'autre plan, il faudrait obtenir la trace du cône ou la projection de sa base. Mais on pourra souvent éviter la construction de ces courbes, en employant pour directrice de la surface du cône la section par un plan p incliné, de manière que la projection de cette courbe soit une circonférence de cercle.

215. Pour déterminer l'inclinaison de la section $a'a'$, de manière que la projection horizontale de cette courbe soit une circonférence de cercle, on prendra sur l'axe du cône un point quelconque ayant pour projections les deux points oo'. Du point o', comme centre, on décrira une circonférence tangente aux deux droites $s'c'$, $s'c'$, qui forment les limites de la projection verticale du cône. La circonférence dont nous venons de parler sera évidemment la projection d'une sphère qui serait inscrite dans le cône proposé. On tracera les deux perpendicu-

laires vv', qui couperont les lignes $s'c'$ aux quatre points a',a',e',e'. Enfin, les droites $a'a'$, $e'e'$, diagonales du quadrilatère $a'a'e'e'$, seront les projections verticales des deux ellipses, dont les projections horizontales se confondront avec la circonférence $zxzx$ décrite du point o comme centre avec $o'z'$ comme rayon. Les deux tangentes sx,sx seront les limites de la projection horizontale du cône. Les points de tangence x,x seront déterminés par le moyen géométrique connu, ou par la perpendiculaire $x'x$ abaissée du point x' suivant lequel se rencontrent les traces des plans p et p'.

216. Pour construire un point appartenant à la surface du cône et qui serait donné par sa projection verticale m', on tracera la génératrice $s'm'$. Le point n', suivant lequel cette génératrice rencontre la directrice $a'a'$, se projettera sur le plan horizontal par l'un des deux points n,n, ce qui donnera les projections horizontales des deux génératrices sn,sn, qui ont $s'n'$ pour projection verticale commune. Enfin, la perpendiculaire $m'm$ déterminera les deux points m,m qui se projettent tous deux par le point m'. La base $c'c'$ du cône étant un cercle incliné, sa projection horizontale sera une ellipse que l'on pourra construire pas ses axes. Le centre O étant déterminé, on fera OU égal à $O'c'$, ce qui donnera le grand axe UU de l'ellipse demandée. Les extrémités c,c du petit axe seront déterminées par les perpendiculaires $c'c$, $c'c$.

217. Dans l'exemple proposé ici comme sujet d'exercice, la trace du cône doit être une ellipse (114). Les génératrices $s'c'$, $s'c'$ percent le plan horizontal en deux points CC qui sont les extrémités du grand axe de l'ellipse cherchée. Le point I, milieu de la droite CC, sera le centre de cette courbe, et le petit axe EE, projeté sur la ligne AZ par un seul point I', doit être égal au double de la ligne I'E'. En effet, l'axe EE, perpendiculaire au plan vertical de projection, est une corde commune à l'ellipse CECE et au cercle provenant de la section du cône par le plan BD perpendiculaire à son axe. Si donc on rabat cette dernière section sur le plan vertical, l'une des extrémités de la corde EE viendra se placer en E' sur la circonférence décrite du point B comme centre avec le rayon BD, ce qui déter-

minera la longueur de l'E' moitié de EE, second axe de l'ellipse CECE.

218. Si du point I, comme centre, on décrit l'arc de cercle CX″ et si l'on détermine le point X″ suivant lequel cet arc serait touché par la tangente *s*—X″, l'ordonnée X′X′ déterminera les points X,X, et par conséquent les deux tangentes *s*—X qui complétent la projection horizontale du cône. Ces droites doivent être tangentes à la circonférence *xxnxxn*. Enfin on remarquera, pour troisième vérification, que les points X″,X,X,X′, doivent être tous sur la trace horizontale du plan *s*′X′X″ qui contient l'intersection *xx*′ des plans *p* et *p*′. On obtiendra les foyers en opérant comme nous l'avons dit au n° 87.

219. **Intersection des cônes et des cylindres.** *Pour trouver la courbe provenant de l'intersection d'un cylindre et d'un cône* (*fig.* 2 et 5), on placera le cylindre perpendiculairement à l'un des plans de projection ; la trace du cylindre sur ce plan devient alors la projection de la courbe, et il ne reste plus qu'à mener des perpendiculaires par les points suivant lesquels cette trace est rencontrée par les projections des génératrices du cône.

220. Si le cône est circulaire (*fig.* 5), on pourra employer pour directrice sa base *c*′*c*′ rabattue en *cc*″, ou la section elliptique qui a pour projection horizontale la circonférence *aa*, que l'on déterminera en opérant comme nous l'avons dit au n° 215. Les *fig.* A″ et B″ sont les développements du cylindre et du cône. Sur la figure 2 on n'a construit que le développement du cône.

221. *Pour trouver la courbe provenant de l'intersection de deux cônes.* On construira (*fig.* 8) la droite (*s*′*o*′*c*′, *soc*) qui joint les sommets des deux cônes, puis par cette droite on fera passer des plans (168). Chacun de ces plans contenant les deux sommets coupera les cônes suivant des lignes droites qui, par leurs intersections, donneront les points de la courbe demandée. Ainsi, par exemple, le plan *p* coupe le cône (A,A′) suivant deux génératrices (*a*,*a*′) (*a*,*a*′), et le cône (B,B′) suivant les deux lignes (*b*,*b*′) (*b*,*b*′). Ces quatre lignes donnent, par leurs intersections, les quatre points (*u*,*u*′...).

222. Si l'on ne pouvait pas obtenir sur l'épure la trace de l'un des deux cônes donnés, il faudrait opérer de la manière suivante.

Supposons que l'on veuille construire la courbe de pénétration des deux cônes circulaires AA′ et BB′ (*fig.* 14 et 15). On prendra l'un des deux plans de projection, perpendiculaire à l'axe de l'un des deux cônes B,B′ dont la trace sera une circonférence de cercle. Le second plan de projection devra être choisi perpendiculaire au plan DIK, qui contient la base du cône AA′, de sorte que les deux projections de cette base seront la droite *n′v′* et l'ellipse *nv*. La droite *so*,*s′o′*, qui contient les sommets des deux cônes, percera le plan DIK en un point dont les deux projections seront *c′*,*c*.

223. Si par la droite *so*,*s′o′* on conçoit un plan quelconque dont l'intersection avec le plan DIK serait la droite *cm*, ce plan coupera le cône AA′ suivant deux génératrices dont les pieds *a*,*a* seront déterminés par la rencontre de la droite *cm* avec l'ellipse *nv*. Ce même plan *p* couperait le cône BB′ suivant deux génératrices *ob*,*ob* dont les pieds *b*,*b* seraient déterminés par la rencontre de la trace *mn* du plan *p* avec la circonférence du cône BB′, et les intersections des deux génératrices *sa*,*sa* par les deux génératrices *ob*,*ob* détermineront les quatre points *u*,*u*,*u*,*u*, dont les projections *u′*,*u′*,*u′*,*u′* seront situées sur les projections verticales des mêmes génératrices.

224. Si l'on n'a pas sur l'épure le point suivant lequel la droite *so*,*s′o′* rencontrerait le plan horizontal de projection, on concevra par le point *ss′* un plan FGH parallèle au plan DIK, et perpendiculaire par conséquent au plan vertical de projection. Les intersections des deux plans DIK,FGH, par le plan *p*, seront deux droites parallèles *cm*,*sn*, et les points *m* et *n* suivant lesquels ces deux lignes percent le plan horizontal de projection, détermineront la trace horizontale *mn* du plan *p*. On déterminera de même les traces de tous les plans que l'on fera passer par les sommets des deux cônes.

225. Si l'on ne veut pas construire l'ellipse *nv*, ou si les intersections de cette courbe par la droite *cm* se font trop obliquement, on rabattra le plan DIK sur le plan horizontal de projec-

tion (*fig.* 16). Par suite de ce mouvement, la base $nv, n'v'$ du cône AA' sera la circonférence $n''v''$, le point cc' se rabattra en c'' et la droite $c''m$ coupera la circonférence $n''v''$ suivant les deux points a'', a'' qui, ramenés en a, a sur la droite cm, détermineront les deux génératrices sa, sa du cône AA'. On peut aussi, comme vérification, rabattre le plan FGH, de sorte que le point s, s' viendra se placer en s'', et la droite $s''n$, parallèle à $c''m$, déterminera le point n sur la trace horizontale du plan FGH.

226. Pour obtenir les points x', x' suivant lesquels les courbes de pénétration $u'x'a'$ sont touchées par les génératrices $s'e'$ du cône AA', on construira (*fig.* 15) les traces $m''n''$, $m'''n'''$, etc., de quelques-uns des plans qui contiennent la droite so, $s'o'$, de manière que deux ou trois de ces plans ne rencontrent pas la circonférence qui forme la trace du cône BB'. On abaissera du point o une perpendiculaire sur chacune des traces mn, $m''n''$, $m'''n'''$, etc., etc., et l'on tracera la courbe dr qui contient les pieds de ces perpendiculaires. L'intersection de la courbe dr avec la trace circulaire du cône BB' donnera le point z par lequel en tracera la tangente $m'n'$. Cette droite sera la trace du plan qui contient les points xx', xx', que l'on déterminera en opérant comme on l'a fait pour les points u, u'.

227. Si les axes des deux cônes se rencontrent comme dans le cas actuel, le plan vertical sc'' qui contient les deux sommets sera un plan de symétrie, ce qui simplifiera beaucoup les opérations. Ainsi, par exemple, en traçant (*fig.* 15) la droite $m^{IV}n^{IV}$ symétrique de mn, on déterminera sur le cône BB' les deux génératrices qui contiennent les points symétriques des quatre points u, u, u, u, dont les projections verticales se confondent avec les points u', u'....

228. **Intersection des sphères, cylindres et cônes.** *Trouver la courbe provenant de l'intersection d'une sphère et d'un cylindre* Pour obtenir l'intersection de la sphère (A, A') et du cylindre (B, B', *fig.* 18), on construira un plan vertical p parallèle aux génératrices du cylindre; ce plan coupera le cylindre suivant deux droites (b, b'). La section dans la sphère sera le cercle aa', et les intersections de ce cercle par les droites (b, b') donneront quatre points (u, u'). En recommençant cette con-

struction, on obtiendra autant de points que l'on voudra. Dans l'exemple que nous avons choisi, il y a deux courbes, ce qui forme une pénétration dans la sphère. Les deux *fig.* B'' et B''' sont les développements des parties du cylindre BB' qui sont extérieures à la sphère.

229. *Construire la courbe provenant de l'intersection d'une sphère et d'un cône.* Soient (*fig.* 21) la sphère A, A' et le cône donné B, B', on construira par le sommet du cône un plan vertical *sp;* ce plan coupera le cône suivant deux lignes droites (*b, b', b''*), que l'on rabattra en les faisant tourner autour de la verticale projetante du sommet. La section de la sphère par ce même plan sera le cercle *a''*, et les quatre points (*u'',u'',....*) feront partie de la courbe cherchée; en ramenant le plan *p* à sa place, les points *u'', u'', u'', u''* viendront se projeter en (*u, u, u...*), d'où il sera facile de déduire leurs projections verticales (*u', u', u'...*), et ainsi de suite. Les *fig.* B'' et B''' sont les développements des parties des cônes qui sont en dehors de la sphère; ces développements s'obtiendront en opérant comme au n° 212.

230. Si la trace du cône était un cercle, on pourrait employer comme surfaces coupantes, des plans parallèles au plan de projection. Dans ce cas (*fig.* 13), les sections dans le cône et dans la sphère seraient des cercles parallèles au plan horizontal de projection. On devrait aussi faire usage de plans parallèles aux plans de projections si le sommet du cône n'était pas sur l'épure; alors on obtiendrait pour section dans le cône, des courbes parallèles et semblables à sa trace, et la construction de ces courbes ne présenterait aucune difficulté. Cette méthode pourra encore être adoptée (*fig.* 9) pour obtenir la courbe d'intersection d'une sphère avec un cylindre circulaire que l'on peut considérer comme un cône dont le sommet serait infiniment éloigné.

231. *Pour construire la courbe provenant de l'intersection de deux sphères,* on projettera les deux sphères données AA' et BB' (*fig.* 17) sur un plan parallèle à la ligne des centres *co,c'o'*. La projection verticale de la section sera la droite *u'n'*, la projection horizontale aura pour grand axe *aa=u'n'*, et pour petit axe *un*, projection horizontale de *u'n'*.

232. **Surfaces de révolution.** Lorsqu'on veut exécuter un solide de révolution, il faut le projeter de la manière la plus simple, et l'on doit alors prendre un plan de projection perpendiculaire à son axe. Mais lorsqu'il est nécessaire de projeter le corps dans une position inclinée, les opérations deviennent plus difficiles. Dans ce cas, on peut concevoir (*fig.* 4) une suite de sphères qui auraient leurs centres sur l'axe de la surface donnée et qui toucheraient une section méridienne *ac*. Quel que soit le plan sur lequel toutes ces sphères seront projetées, la courbe tangente à leurs projections sera la limite de la projection de la surface. On peut encore supposer (*fig.* 19) la surface coupée par un certain nombre de plans perpendiculaires à son axe. Chaque section circulaire a pour projection une ellipse, et la courbe tangente à toutes ces ellipses forme le contour de la projection.

233. Cette manière d'opérer convient évidemment pour les arêtes circulaires de la surface; mais pour les autres parties, elle ne donne le contour de la projection que d'une manière approximative, et laisse de l'incertitude sur la position de certains points singuliers, tels que *a*, *a*, *o*, *o*. Pour obtenir une grande exactitude, on conçoit une suite de plans tangents perpendiculaires au plan sur lequel on veut projeter la surface, ou, ce qui revient au même, parallèle à une droite *pp'* perpendiculaire au plan de projection, on détermine le point de tangence pour chaque plan tangent, et l'on projette la courbe qui contient tous ces points de tangence. On trouvera dans le traité de Géométrie descriptive tous les détails relatifs à cette opération, qui d'ailleurs n'est pas nécessaire pour résoudre les questions suivantes.

234. *Intersection des surfaces de révolution avec les cylindres ou les cônes*, etc. Pour construire ces lignes, on peut toujours appliquer le principe général du n° 164, et couper les deux surfaces par des plans; mais lorsque la surface de révolution aura son axe perpendiculaire à l'un des plans de projection, l'opération deviendra très-simple. En effet, lorsque l'on emploie des plans perpendiculaires à l'axe d'une surface de révolution, on a l'avantage de couper cette surface suivant des

cercles qui se projettent par des cercles, de sorte qu'il n'y a plus qu'à construire les lignes suivant lesquelles ces mêmes plans coupent la seconde surface. Dans le cas de l'intersection avec une sphère, des plans perpendiculaires à l'axe de la surface de révolution couperont les deux surfaces suivant des cercles. Il en serait de même s'il s'agissait de *deux surfaces de révolution dont les axes seraient parallèles*.

235. Pour construire la courbe d'*intersection de deux surfaces de révolution dont les axes ne se rencontrent pas*, on prendra l'un des plans de projection perpendiculaire à l'axe de l'une des deux surfaces données, et le second plan de projection parallèle aux deux axes. Supposons, par exemple (*fig.* 10, 11 et 12), que la surface AA′ soit perpendiculaire au plan horizontal, la projection de cette surface sera limitée par celle de son plus grand parallèle, et sa projection verticale sera une section méridienne.

L'axe de la surface inclinée BB′ étant également parallèle au plan vertical, sa projection, sur ce plan, se composera d'une section méridienne, et pour construire la projection horizontale, on emploiera l'un des moyens indiqués aux n°s 232 et 233.

Cela étant fait, on coupera les deux surfaces par un plan *pp* que nous supposons ici parallèle au plan vertical de projection. La section de la surface AA′ par le plan *pp* sera une courbe *asas*; la section de la surface BB′ par le plan *p* se composera des deux courbes *zvz*, et les intersections de ces dernières lignes par la courbe *asas* donneront les quatre points *u*,*u*′..... qui devront faire partie des courbes de pénétration demandées (164). La section des deux surfaces par un second plan déterminera quatre autres points. Un troisième plan en donnera encore quatre, et ainsi de suite.

236. Avant d'aller plus loin, il est nécessaire d'entrer dans quelques détails sur la construction des courbes *asas*,*zvz*. La première de ces deux lignes ne présentera aucune difficulté, puisqu'il suffira d'élever des perpendiculaires à la ligne AZ, par les points suivant lesquels la trace *pp* du plan coupant rencontre les projections horizontales des parallèles que l'on aura dû établir d'avance sur la surface AA′. Pour faciliter la construction

des deux courbes *zuz*, il faudra également établir un certain nombre de parallèles sur la projection verticale de la surface BB'. Mais pour éviter la construction des ellipses qui représenteraient les projections horizontales de toutes ces circonférences de cercles, on les projettera sur le plan auxiliaire DHK, perpendiculaire à l'axe de la surface inclinée BB', puis on rabattra cette nouvelle projection B'' en la faisant tourner autour de la trace horizontale du plan DHK, ou de toute autre droite horizontale prise à volonté dans ce plan. Les parallèles de la surface BB' seront représentées sur la nouvelle projection B'' par des cercles concentriques, et les intersections de ces circonférences par la trace du plan *pp* feront partie de la courbe cherchée. Il ne restera donc plus qu'à faire revenir tous ces points à leur place. Pour y parvenir on les projettera d'abord sur le plan horizontal D'H que l'on fera revenir dans la position DH, d'où chacun des points cherchés devra être ramené par une perpendiculaire au plan DHK, sur le parallèle auquel il doit appartenir. Ainsi, par exemple, le point *o*, projeté en *o'*, viendra se placer en *o''*, d'où l'on déduira sa projection verticale *o'''*.

237. Pour plus d'ordre on fera bien de numéroter les parallèles sur les deux projections B' et B'', et l'on diminuera le travail en choisissant de préférence ceux qui ont des rayons égaux, afin qu'ils aient une projection commune sur la *fig.* B''. On devra aussi choisir la position des plans coupants auxiliaires, de manière à obtenir les points les plus essentiels des deux courbes de pénétration. Ainsi, par exemple, si l'on veut obtenir les points suivant lesquels ces courbes touchent le méridien principal de la surface AA', on coupera les deux surfaces par le plan vertical *p'p'* qui contient l'axe de cette surface. Le plan *p''p''* déterminera les points situés sur la section méridienne principale de la surface BB'.

Dans le cas où l'on n'aurait pas d'autre but que d'obtenir la ligne de pénétration des deux surfaces proposées, on pourrait se dispenser de construire la projection horizontale de la surface inclinée, les projections B' et B'' de cette surface suffisant, avec celles de la surface A, pour déterminer complétement la courbe demandée.

238. **Surfaces réglées**. Pour l'*intersection d'une surface réglée par une autre surface*, je me contenterai encore de rappeler quelques-uns des principes établis dans la Géométrie descriptive. Ainsi, pour obtenir l'intersection d'une surface réglée et d'un cylindre, on coupera les deux surfaces par des plans parallèles au cylindre et contenant les génératrices de la surface réglée.

239. Pour l'*intersection d'une surface réglée avec un cône*, on emploiera des plans passant par le sommet du cône et dont chacun contiendrait une des génératrices de la surface donnée.

240. Pour l'*intersection avec une surface de révolution*, on emploiera des plans perpendiculaires à l'axe de la surface.

241. Enfin pour l'*intersection de deux surfaces réglées* (*fig.* 22), on construira un plan projetant p, contenant la génératrice $aa,a'a'$; ce plan coupera la seconde surface réglée, suivant une courbe $co,c'o'$, facile à construire, et l'intersection de cette courbe avec la droite a,a' déterminera un point u,u', commun aux deux surfaces. On recommencera cette construction qui déterminera tous les points de la courbe demandée $vu,v'u'$.

COUPE DES PIERRES.

LIVRE PREMIER.

SURFACES PLANES.

CHAPITRE PREMIER.

Des Murs.

I.

242. **Définitions.** — Les murs sont employés, quelquefois pour clore des espaces découverts ou pour soutenir des terres et empêcher leur éboulement ; d'autres fois, ils servent à supporter les voûtes en pierres ou les combles en charpente ou en fer d'un édifice.

C'est l'usage auquel un mur est destiné qui doit déterminer son plus ou moins de solidité.

La solidité d'un mur ne dépend pas seulement de la grosseur et de la qualité des pierres employées dans sa construc-

tion, mais encore de la bonne disposition de ces pierres entre elles.

243. Les pierres se formant dans l'intérieur de la terre par couches horizontales superposées, on les extrait sous la forme de parallélipipèdes rectangles. Les deux faces, qui dans la carrière étaient placées horizontalement, se nomment *lits de carrière*.

244. Quelle que soit la place qu'une pierre doit occuper dans un édifice, il faut faire en sorte que les lits de carrière soient, autant que possible, perpendiculaires à la direction de la force qui agit sur elle, afin de comprimer par la pression les diverses couches dont cette pierre se compose.

245. On nomme *lit de pose* d'une pierre la face suivant laquelle elle doit s'appliquer sur les pierres qui ont été posées avant elle. Assez souvent, surtout dans les murs, le lit de carrière est en même temps le lit de pose et doit être placé horizontalement. Chaque rang de pierre se nomme une *assise*.

246. On nomme *parements* celles des faces d'une pierre qui restent à découvert et contribuent par conséquent à former la surface du mur.

247. Si l'on a des pierres assez grandes pour que leur largeur soit égale à l'épaisseur du mur, on les disposera comme on le voit dans la figure 1re (*PL.* **10**). Les pierres qui ont deux parements dans le sens de leur longueur se nomment *parpaings;* elles se nommeraient *boutisses*, si les

parements étaient aux extrémités, que l'on nomme aussi *têtes* de la pierre. Enfin, si la pierre n'avait qu'un parement, on lui donnerait le nom de *carreau*. Dans la figure 2, la pierre *a* est une boutisse et la pierre *b* est un carreau.

248. Ainsi la figure 1re représente un mur composé de parpaings. Dans la figure 2, les assises sont alternativement composées de carreaux et de boutisses, et dans la figure 3; il n'y a que des carreaux.

249. Mais, dans tous les cas, on doit faire en sorte que les *joints*, ou faces verticales suivant lesquelles se touchent deux pierres contiguës d'une même assise, correspondent, autant que possible, au milieu d'une pierre de l'assise inférieure. Je dis autant que possible, parce qu'il serait souvent trop coûteux de satisfaire rigoureusement à cette condition.

II.

250. **Mur droit**. — On nomme *mur droit* celui qui est compris entre deux plans verticaux parallèles entre eux. La figure 4 représente un mur droit projeté sur un plan perpendiculaire à sa longueur.

Toutes les pierres de ce mur sont des parallélipipèdes rectangles, égaux entre eux, et disposés comme dans la figure 1re. Les deux lignes *ab*, *cb*, représentent deux des dimensions de la pierre; la troisième dimension *b'd'* sera donnée par la projection horizontale.

251. Pour exécuter cette pierre (*fig.* 5), on choisira un bloc capable de la contenir, puis après avoir dressé une première face $a''b''d''e''$, on en taillera une seconde $a''b''c''h''$, faisant un angle droit avec la première. Cela étant fait, on tracera les deux lignes $b''d''$, $b''c''$, perpendiculaires à l'arrête $a''b''$, ce qui déterminera la *tête* ou *parement* $c''b''d''$. Le parement opposé sera déterminé par les arêtes $a''h''$, $a''e''$. Enfin, en portant les dimensions de la pierre sur les arêtes correspondantes, il sera facile de tailler les deux dernières faces.

III.

252. **Murs en talus.** — Les murs en talus (*fig.* 6) sont destinés à soutenir des terrains et à empêcher leur éboulement ; c'est pourquoi on leur donne ordinairement plus de largeur vers leur base, surtout du côté opposé à celui où s'exerce la pression.

253. Si le talus était peu considérable, on pourrait prolonger les coupes horizontales telles que *ab*, jusqu'à la face en talus. Mais il résulterait de là, que le lit de pose ferait avec le talus deux angles inégaux, dont un serait aigu, ce que l'on doit surtout éviter dans la coupe des pierres. Pour obvier à cet inconvénient, on prolonge la coupe horizontale du lit de pose, seulement jusqu'à 5 ou 6 centimètres du talus, puis à partir de ce point, on dirige une coupe *bc* perpendiculaire à la face du talus. Ce moyen d'éviter l'angle aigu présente deux inconvénients : le premier, c'est de diminuer l'étendue de la surface hori-

zontale suivant laquelle chaque pierre s'appuie sur la pierre inférieure ; le second inconvénient consiste à faire toucher les deux pierres suivant une face brisée, et l'on conçoit que si l'angle obtus saillant *abc* n'est pas taillé parfaitement égal à l'angle rentrant dans lequel il doit s'appliquer, la pierre ne posera pas également dans toute son étendue, et le tassement provenant de la pression des parties supérieures de l'édifice, pourra la faire rompre ou glisser sur la partie inclinée du lit de pose. Nous reconnaîtrons souvent par la suite qu'une irrégularité dans l'ensemble ou dans quelques parties d'un monument, entraîne nécessairement comme conséquence, quelque irrégularité dans la forme des pierres qui le composent, et le constructeur doit faire tous ses efforts pour éviter ces irrégularités, ou du moins, pour en diminuer le nombre et en neutraliser les effets.

254. En général on doit, dans la coupe des pierres,

1° *Augmenter*, autant que cela est possible, sans nuire à la disposition générale et à l'élégance de l'édifice, *les surfaces planes, ou joints, suivant lesquelles les pierres doivent se toucher ;*

2° *Éviter de faire toucher ces mêmes pierres suivant les surfaces brisées ou courbes ;*

3° Enfin, *faire, autant que l'on pourra, les coupes perpendiculaires entre elles, afin d'éviter les angles aigus.* Mais ce n'est souvent qu'aux dépens de l'une de ces conditions que l'on peut satisfaire aux autres. On doit s'exercer à choisir dans chaque cas le parti qui présente le moins d'inconvénients.

255. Pour éviter l'angle aigu que la face du talus fait avec

la surface du sol, on pourra, au point *d*, couper verticalement la partie de la pierre qui entre dans la terre, ou bien on augmentera la largeur de la pierre d'une quantité *de*, puis on taillera le petit plan vertical *eu*. Le premier moyen emploiera moins de pierre, le second donnera au mur plus de solidité en élargissant sa base.

256. Pour exécuter la première pierre du mur en talus (*fig.* 6), on dressera d'abord (*fig.* 7) le lit de pose $s''u''n''m''$, que l'on fera égal au rectangle $s'u'n'm'$, qui représente la projection horizontale de la pierre que l'on veut tailler; on taillera ensuite les deux faces $s''u''p''$, $m''n''q''$ perpendiculaires au lit de pose. Puis, après avoir construit bien exactement en lattes ou en tôle la figure *abcdeus* qui représente le profil de la pierre, on l'appliquera sur la face $s''u''p''$, en faisant coïncider *su* avec $s''u''$. On tracera sur cette face le contour $a''b''c''d''e''u''s''$, et l'on fera la même opération sur la face opposée. Enfin, on abattra toutes les parties qui empêcheraient la règle de s'appuyer sur les contours de ces deux figures, et la pierre sera taillée.

On donne le nom de *panneau* aux figures découpées que l'on applique sur la pierre pour en tracer le contour.

Les autres pierres du mur ne présenteront pas plus de difficultés.

IV.

257. **Mur biais.** — Un murs biais (*fig.* 8) est celui qui est compris entre deux plans verticaux qui ne sont pas parallèles entre eux.

Les lits de pose de ce mur seront horizontaux dans toute leur étendue ; mais comme les deux faces verticales du mur ne sont pas parallèles, les coupes verticales perpendiculaires à l'une de ces faces feraient des angles aigus avec l'autre face, et pour éviter cela on conduira les joints verticaux $a'b'$, $m'n'$, jusqu'à une certaine distance de la face opposée du mur, puis on dirigera les coupes $b'c'$, $n'u'$, perpendiculaires à cette face.

258. Pour tailler une de ces pierres, on fera (*fig.* 9) le lit de pose $p''q''v''m''$, égal au rectangle $p'q'v'm'$, qui contient la projection horizontale de la pierre; puis on taillera la face $p''m''k''h''$ perpendiculaire sur le lit de pose, telle que $p''h''$ soit égal à la hauteur as. Enfin, on fera la face $h''k''x''z''$ perpendiculaire sur $p''m''k''h''$, et par conséquent parallèle au lit de pose. On construira le panneau $a'b'c'u'n'm'$ que l'on appliquera sur le lit de pose et sur la face qui lui est opposée; puis, après avoir tracé sur ces faces le contour du panneau, on abattra toutes les parties excédantes, et la pierre sera taillée.

On opérera de même pour les autres pierres.

V.

259. **Mur biais et en talus.** — La figure 10 représente dans un même mur la combinaison des deux exemples précédents. On a projeté le mur sur un plan vertical perpendiculaire à la face du talus, qui, par conséquent, est représentée sur cette projection par la ligne droite dy. La face verticale du mur a pour projection le rectangle $pqox$.

260. On taillera d'abord la pierre comme s'il s'agissait d'un mur biais, en appliquant le panneau $a's'u'n'm'p'$ sur le lit de pose et sur la face opposée; puis, après avoir abattu la pierre excédante, on découpera le panneau *zbcdeus*, dont on tracera le contour sur les deux faces $z''u''s''$, $m''n''x''$. Après quoi, il n'y aura plus aucune difficulté.

VI.

261. **Mur de rampe ou rampant.** — Le nom que l'on donne aux *murs de rampe* indique assez l'usage auquel ils sont destinés. Il est facile de reconnaître par la figure 12 que ces sortes de murs ne diffèrent de ceux en talus, que par une plus grande inclinaison.

262. Pour tracer la pierre (*fig.* 13), il suffira d'appliquer le panneau *abcdeh* sur les deux faces ou permanents qui correspondent aux faces du mur.

VII.

263. **Coins ou encoignures.** — Lorsque deux murs se rencontrent pour former le coin ou encoignure d'un bâtiment, on doit disposer les pierres comme on le voit (*fig.* 14), en plaçant alternativement les longueurs des pierres parallèlement à l'une et à l'autre face du coin.

La figure 15 est la projection horizontale de l'encoignure.

Si les deux murs devaient se rencontrer suivant un angle aigu, il faudrait couper cet angle comme on le voit par la projection horizontale (*fig.* 16).

La figure 17 représente la disposition des pierres.

Enfin, si l'on avait deux murs en talus formant un angle aigu, on ferait une coupe en talus comme dans la figure 18.

Si l'on a bien compris ce qui précède, on n'éprouvera pas de difficulté pour tailler ces sortes de murs.

Je ne parlerai pas non plus de la combinaison de deux murs dont les talus seraient différemment inclinés. Les exemples de raccordement que nous verrons par la suite familiariseront suffisamment le lecteur avec les difficultés, que je me contenterai d'indiquer ici comme sujets d'exercice.

CHAPITRE II.

Plates-bandes.

I.

264. **Définitions.** — Lorsque l'arête supérieure d'une porte ou d'une fenêtre est plane et horizontale, on lui donne le nom de *plate-bande.*

265. Les deux *murs* verticaux qui supportent la plate-bande se nomment *pieds-droits* ou *jambages.* On donne le nom de *tableaux* aux faces des jambages qui forment l'ouverture de la porte.

266. On construira le triangle équilatéral *abc* (*fig.* 19, *PL.* **11**); puis après avoir partagé le côté horizontal *ab* en un nombre impair de parties égales, on mènera par chaque point de division des droites, telles que *de,* dont les directions prolongées passeraient par le point *c.* Ces droites représenteront les coupes suivant lesquelles doivent être taillées les pierres de la plate-bande.

Cette disposition permettra évidemment de placer le lit de carrière dans une position telle, que les couches dont se

compose la pierre soient pressées les unes contre les autres, tandis que dans le cas où la plate-bande serait formée d'une seule pierre, le lit de carrière placé horizontalement sur les pieds-droits ne serait pas soutenu dans la partie correspondante à l'ouverture de la porte.

267. Lorsque la plate-bande est ainsi composée de plusieurs pierres, chacune d'elles se nomme *claveau;* celle qui correspond au milieu de la porte se nomme la *clef*. On donne le nom de *coupes* aux faces inclinées suivant lesquelles les claveaux se touchent; l'*intrados* est la surface apparente qui forme le dessous de la plate-bande, et la *tête du claveau* est le polygone, tel que *aedhus*, qui fait partie de la face apparente du mur dans lequel la porte est percée. Enfin, on appelle *sommiers* les pierres qui forment la partie supérieure des jambages et sur lesquelles s'appuie la plate-bande.

268. Dans l'appareil que nous venons d'indiquer, il est évident que chaque pierre, par la nature de sa forme, agit comme le ferait un coin, pour écarter les deux pierres entre lesquelles elle se trouve placée. Mais comme cette action est d'autant plus énergique que les coupes se rapprochent davantage de la position verticale, il en résulte que la plate-bande tend à se rompre vers son milieu, et que la clef s'enfonçant, les parties qui sont à droite et à gauche ne sont plus plus soutenues, et, tournant autour des points *a* et *b*, exercent sur les pieds-droits une pression oblique qui tend à les renverser en dehors.

269. Pour diminuer ces effets autant que possible, on donnera aux coupes de la clef le plus de longueur que l'on pourra en augmentant s'il le faut, à ce point, l'épaisseur de

la plate-bande; on disposera au-dessus, des arcs en pierre ou en brique, dont l'effet sera de supporter la pression des parties supérieures de l'édifice, et de détourner cette pression des points qui correspondent à l'ouverture de la porte; enfin par des crampons ou armatures en fer, on reliera entre elles les pierres de la plate-bande, de manière qu'elles ne fassent en quelque sorte qu'un seul morceau. Mais ces moyens, qui dépendent des lois de la Mécanique, seront traités dans la Construction générale et dans l'application de la Statique à l'équilibre des voûtes. Nous nous bornerons ici, comme je l'ai dit plus haut, à la construction de l'épure et au tracé des lignes nécessaires pour la détermination de toutes les coupes.

270. Pour empêcher la première pierre de la plate-bande de glisser sur le sommier du pied-droit, on brisera la coupe *as* par le plan horizontal *su*. La figure de cette coupe lui a fait donner le nom de *crossette*. Il est facile de voir que la partie *dhus* sera maintenue sur le sommier par la pression des pierres supérieures. Aussi augmenterait-on la solidité de la plate-bande en prolongeant la seconde pierre de manière à former crossette sur la première, etc. Il ne faudrait pas cependant donner trop de longueur aux parties horizontales des pierres formant crossettes, parce qu'elles résisteraient moins bien à l'inégalité de pression produite par le tassement.

271. Pour éviter les angles aigus que les coupes feraient avec l'intrados, on fera par les points de division de cet intrados des coupes verticales, telles que *vz*, jusqu'à la rencontre d'une ligne horizontale *ti* (*fig.* 19), ou jusqu'à un arc de cercle *pq*, décrit du point *c* comme centre (*fig.* 20). Le reste des coupes sera, comme précédemment, dirigé vers le point *c*.

La figure 22 représente la première pierre à droite de la plate-bande (*fig.* 19).

272. On peut encore, par la coupe même de la pierre et sans recourir à des moyens étrangers, augmenter l'adhérence des claveaux. On fera les coupes brisées comme le représente la ligne *mnyr* (*fig.* 20), de manière que chaque pierre s'accrochera sur la pierre adjacente par une petite cressette *mny*. L'usage n'est pas cependant de donner cette forme aux coupes de la clef, l'expérience ayant fait reconnaître que, dans la rupture des plates-bandes, la clef tend moins à glisser entre les pierres adjacentes qu'à les entraîner dans sa chute, en les faisant tourner autour des angles de la porte.

La figure 23 fera concevoir la forme de la première pierre à droite de la plate-bande (*fig.* 20).

Si l'on veut éviter l'aspect désagréable produit dans la face apparente du mur par la coupe brisée *mnyr*, on ne fera cette coupe que dans une partie de l'épaisseur du mur, comme on le voit par la figure 23, qui représente le creux dans lequel doit venir se placer la partie correspondante en relief de la pierre adjacente.

Les figures 21, 24, 25 et 26, représentent des coupes destinées à produire le même résultat. La partie saillante de la figure 26 doit occuper le creux de la figure 25.

La taille de ces pierres ne présentera aucune difficulté. Ainsi, par exemple, pour celle représentée (*fig.* 24), on découpera (*fig.* 21) le panneau de tête *acbeuvzx* que l'on appliquera sur les faces parallèles et opposées d'une pierre dont la longueur doit être égale à l'épaisseur du mur dans lequel la porte est percée; puis on abattra toutes les parties excédantes, après quoi il sera facile de tracer le contour de la partie saillante *acb*.

Les parties creuses des pierres adjacentes ne présenteront pas plus de difficultés.

273. Dans la figure 20, il y a tout autour de la porte un petit renfoncement rectangulaire auquel on donne le nom de *feuillure*. On taillera d'abord la pierre sans y avoir égard, puis deux droites *ac*, *co* (*fig.* 23), que l'on tracera sur chaque côté de la pierre détermineront le contour de la feuillure.

II.

274. **Voûtes plates.** — Si l'on suppose une plate-bande prolongée, on aura une voûte plate. Les deux jambages ou pieds-droits seront remplacés par deux murs parallèles, et la voûte sera formée de claveaux absolument semblables à ceux de la plate-bande et placés bout à bout, en ayant soin, autant que possible, de faire les joints de tête d'une rangée de claveaux, correspondants au milieu de la longueur des claveaux des rangées adjacentes.

La figure 27 représente la partie de plafond carré formé par la rencontre de deux galeries A et B, couvertes par des voûtes plates.

La figure 28 est le sommier, et la figure 29 est la pierre qui vient s'y appliquer. On donne à cette pierre le nom de *claveau d'angle*. Pour la tailler, on commencera par équarrir un bloc ayant pour base le rectangle *abcd*, et pour hauteur l'épaisseur de la voûte; puis on appliquera le panneau de tête (*fig.* 19) sur les deux faces verticales *cb*, *cd*. Il ne

restera plus qu'à suivre le contour de ces panneaux, en abattant la pierre perpendiculairement à leur face, et prenant bien garde, toutefois, de ne pas trop prolonger les coupes intérieures qui doivent se rencontrer dans le plan vertical qui contiendrait la diagonale *ac*. Dans cet exemple, on a donné aux coupes des claveaux la forme *kzv* (*fig.* 19). Il n'est pas nécessaire d'ajouter que l'on augmenterait la solidité en faisant ces coupes suivant la forme *mnyru* (*fig.* 20).

275. La figure 30 est une voûte plate couvrant une salle carrée, et la figure 31 représente le claveau d'angle qui a pour projection horizontale *mnqpz*. La forme de cette pierre indique assez qu'il faudrait appliquer le panneau de tête sur les deux faces verticales *mn*, *zp*, puis tailler la pierre en suivant les contours de ces panneaux et perpendiculairement à leur surface.

Cette espèce de voûte n'aura pas de poussée, si l'on fait tout autour de chaque rangée de claveaux une crossette telle que *mnyr;* on pourra, dans ce cas, considérer la voûte entière comme composée de châssis rectangulaires et concentriques s'emboîtant les uns dans les autres, et portant sur les parties horizontales des crossettes. Cette précaution ne suffit pas, il reste encore à tailler les claveaux d'une même rangée, de manière qu'ils se soutiennent mutuellement. Pour cela on fera sur la tête de chaque claveau une crossette *ab* (*fig.* 30), au moyen de laquelle il s'appuiera sur le claveau qui précède en partant du claveau d'angle. On pourra reconnaître (*Statique*) que par cette combinaison, chaque claveau étant accroché sur celui qui précède et sur le claveau adjacent de la rangée extérieure, ne tendra pas à glisser sur la coupe oblique et à descendre du côté de la clef. Aussi dans ces sortes de voûtes peut-on supprimer non-seulement la clef,

mais encore plusieurs rangées de claveaux concentriques pour éclairer la salle.

276. La solidité de cet appareil le fait préférer à celui de la figure 27, pour couvrir l'espace provenant de la rencontre de deux galeries.

On construira dans ce cas (*fig.* 32) sur les pieds-droits *a*, *b*, *c*, *d*, quatre plates-bandes qui remplaceront les quatre murs de l'exemple précédent.

LIVRE II.

SURFACES CYLINDRIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

Murs.

I.

277. Murs ronds. — Si du point *c* comme centre (*fig.* 33, *PL.* **12**) et avec les rayons *ca*, *cb*, on décrit deux cercles concentriques, l'espace *abde* compris entre ces deux cercles, pourra être considéré comme la projection horizontale d'un mur rond à base circulaire.

Pour tailler une des pierres de ce mur, on préparera (*fig.* 34) une pierre d'une épaisseur égale à celle que l'on veut tailler, puis on appliquera le panneau horizontal *abuv* sur les deux faces de la pierre qui doivent former les lits de pose. On abattra ensuite la pierre de manière que la règle

puisse s'appuyer sur le contour des deux panneaux. Quant à la partie cylindrique *ava'v'*, il ne suffira pas que la règle puisse dans toutes ses positions s'appuyer sur les deux courbes *av*, *a'v'*, il faut encore (*Géométrie descriptive*) que toutes ses positions soient parallèles entre elles. Pour arriver à ce résultat on divisera les deux arcs *av*, *a'v'*, qui forment ici les directrices du cylindre, en un même nombre de parties égales, et les points correspondants sur ces deux arcs détermineront les différentes positions de la règle. La surface cylindrique intérieure *bu* se taillera de la même manière.

278. La figure 35 représente deux murs qui se raccordent sur le coin, par une portion de mur circulaire. Les pierres se tailleront comme dans l'exemple précédent; le parement de la pierre *abcs* est en partie plan et en partie circulaire.

279. La figure 36 représente un mur à base elliptique. Si l'on veut que l'intérieur du mur soit une ellipse semblable à celle qui détermine l'extérieur, on mènera *cd* parallèle à la droite *ab* qui joint les extrémités des axes de la première ellipse, puis sur les deux droites *co*, *od*, on construira une ellipse qui sera semblable à la première. Dans ce cas, le mur sera plus épais vers le point *a* que vers le point *b*; ce qui est quelquefois nécessaire pour résister à la poussée de certaines voûtes.

Si l'on fait les coupes ou joints verticaux *vu* perpendiculaires à la surface extérieure du mur, ces joints feront des angles inégaux avec la surface intérieure. Pour éviter cet effet, on pourra faire des coupes brisées *mns* telles, que *mn* soit perpendiculaire à l'extérieur, et *ns* à l'intérieur du mur;

on peut encore faire des coupes perpendiculaires à une ellipse moyenne, telle que *pq*. Dans ce cas, les angles formés par les joints avec les deux surfaces du mur différeraient peu de l'angle droit.

On peut encore former la surface intérieure du mur par une courbe *zxy* parallèle à la surface extérieure du mur; cette courbe ne sera pas une ellipse. Pour la tracer, on construira un certain nombre de normales à l'ellipse extérieure, puis on portera sur chacune de ces normales, une grandeur *bz* égale à l'épaisseur que l'on veut donner au mur.

Berceaux et Portes droites.

II.

280. **Berceau.** — Nous venons de dire que les parements extérieurs et intérieurs des murs ronds étaient des surfaces cylindriques. Si nous supposons actuellement que ces mêmes surfaces, au lieu d'être placées verticalement, soient placées horizontalement, comme le représente la figure 37; on aura un berceau cylindrique. On emploie cette espèce de voûte pour couvrir l'espace compris entre deux murs parallèles, dont les projections horizontales seraient A, B. On a supprimé ces murs dans la projection verticale, et l'on n'a figuré que la portion de la voûte au-dessus du plan *mn*, que l'on nomme le *plan de naissance*. La surface cylindrique, formant l'intérieur de la voûte, se nomme l'*intrados* ou la

douelle, et la surface extérieure s'appelle *extrados*. On donne le nom de *cintre* à la courbe qui détermine la forme de l'*intrados;* chacune des pierres de la voûte se nomme *voussoir;* chaque rangée horizontale de voussoirs se nomme une *retombée*. La première retombée de chaque côté de la voûte est celle qui repose sur le plan de naissance : les autres retombées se comptent dans le même ordre; les faces suivant lesquelles se touchent les voussoirs s'appellent *joints*. Le cintre doit toujours être partagé en un nombre impair de parties, autant que possible égales entre elles. Le voussoir du milieu se nomme la *clef*.

Pour construire la projection horizontale, on a supposé que le berceau était renversé, afin de mieux faire voir l'appareil de l'intrados.

281. Nous avons dit (**244**) que le lit de carrière d'une pierre devait être placé perpendiculairement à la direction suivant laquelle agit la pression; ainsi, dans les murs, nous avons placé le lit de carrière horizontalement, parce qu'en vertu de la pesanteur, la pression des pierres supérieures est verticale; mais dans les plates-bandes et berceaux, les voussoirs agissant comme des coins qui tendraient à écarter les pierres adjacentes, la force se décompose (*Statique*) perpendiculairement aux faces suivant lesquelles les pierres se touchent; aussi devons-nous, autant que possible, placer le lit de carrière parallèlement à ces faces. Ainsi (*fig.* 37) on placerait ce lit parallèlement à un plan *pq* qui partagerait le voussoir en deux parties égales; cependant, par des raisons d'économie, on ne s'assujettit pas rigoureusement à cette règle, et l'on place le plus souvent le lit de carrière parallèlement à l'une des deux faces latérales du voussoir; cela permet quelquefois d'employer des pierres dont les angles auraient été enlevés par accident.

282. Dans la figure 37, l'extrados et l'intrados sont déterminés par deux cercles concentriques; mais cette disposition ne serait pas conforme aux lois de l'équilibre et ne pourrait être adoptée que pour un berceau qui aurait peu de largeur.

La théorie et l'expérience ont fait reconnaître (*Statique*) que, dans le cas où le cintre qui détermine l'intrados serait un demi-cercle, il faudrait pour que toutes les pierres qui composent la voûte fussent maintenues en équilibre par leur propre poids et sans le secours de moyens étrangers; il faudrait, dis-je, que l'extrados eût la forme de la courbe *bac* (*fig.* 38) dont les branches se rapprochent toujours du plan de naissance *de*, sans toucher ce plan; de sorte que les deux pierres qui à droite et à gauche forment la naissance de la voûte devraient avoir une grandeur infinie. On conçoit qu'on ne pourra pas, et qu'il ne sera même pas nécessaire de satisfaire rigoureusement à ces conditions, l'adhérence des pierres pouvant être augmentée indéfiniment, non-seulement par des mortiers, mais encore par des coupes ou crossettes semblables à celles que nous avons indiquées en parlant des plates-bandes; enfin par des crampons ou armatures en fer, disposées de manière à lier les pierres entre elles; mais pour donner plus de légèreté aux voûtes, et se rapprocher autant que possible de la forme indiquée par la théorie, on dispose assez souvent l'appareil comme on le voit figure 39.

Les pierres *a* et *b* forment à droite et à gauche deux masses qui par leur force d'inertie suppléent suffisamment à la grandeur infinie que l'on devrait donner aux premières pierres de la voûte. Quant à la partie courbe de l'extrados, on la déterminera par un arc de cercle dont le centre serait situé en *o*, de manière que l'on ait *oc* égal à peu près au tiers du rayon de l'intrados.

III.

283. **Porte droite.** — Lorsqu'un berceau a peu de longueur, on lui donne le nom de *porte*.

284. Les portes étant souvent percées dans la façade du monument, on doit tâcher (*fig.* 40) de raccorder les joints ou coupes des voussoirs avec les lits et joints verticaux du mur, de manière à contribuer à la décoration de l'édifice.

285. On fait assez souvent tout autour de la porte un petit renfoncement ou feuillure, comme celui que nous avons fait à la plate-bande (*fig.* 20). La feuillure est destinée à recevoir les vantaux de la porte.

286. Pour tailler une pierre de porte droite, on équarrira un parallélipipède d'une longueur égale à l'épaisseur du mur, et d'une base capable de contenir le panneau de tête *abcdei;* puis, après avoir relevé ce panneau sur l'épure, on l'appliquera sur les deux faces correspondantes de la pierre, et l'on abattra tout ce qui empêcherait la règle de s'appuyer sur le contour de ces deux panneaux.

Il est bien entendu qu'il faudra marquer entre les points *e*, *i*, plusieurs points de division, qui, reportés sur la pierre, détermineront le parallélisme de toutes les positions de la règle, ainsi que cela a été fait pour la partie cylindrique de la pierre d'un mur rond (*fig.* 33).

Pour tracer la feuillure, on marquera sur la tête de la pierre les points *m*, *n*, par lesquels on fera passer l'arc *mn*,

dont on prendra la courbure sur l'épure. On pourra encore tracer cet arc en faisant mouvoir un compas dont une branche s'appuierait sur l'arc *ei*, tandis que l'autre branche tracerait l'arc *mn*. L'arc *ou* se tracera de la même manière, ou avec une règle flexible à laquelle on fera prendre la courbure de la douelle. Enfin, taillant la pierre suivant l'arc *mn*, perpendiculairement à la tête, et suivant l'arc *ou*, perpendiculairement à la douelle, on formera deux petites surfaces, l'une cylindrique, l'autre plane, qui se couperont suivant l'arête rentrante *cz*; et la feuillure sera taillée (*fig.* 41).

287. Je terminerai ce sujet en donnant quelques exemples d'appareils de portes droites.

On distingue en général les cintres de cette manière :

288. Le *plein cintre* est celui qui est formé par une demi-circonférence, comme dans les exemples précédents.

289 Le cintre est *surbaissé* (*fig.* 42) lorsque la hauteur *cb* est moindre que la demi-largeur *ca*.

290. Enfin le cintre est *surhaussé* (*fig.* 43) lorsque la hauteur est plus grande que la demi-largeur.

291. La figure 44 représente une porte *rampante;* le cintre *abc* est une courbe à deux centres se raccordant avec les pieds-droits aux points de tangence *a* et *c*. La distance *ob* devant être égale à la moitie de la droite *ca*, le point *m*, centre de l'arc *ab*, sera donné par l'intersection de l'horizontale *am* avec la perpendiculaire sur le milieu de la corde *ab*, et le point *n*, centre de *bc*, sera l'intersection de l'horizontale *cn*

et de la perpendiculaire sur le milieu de *bc*. Les deux arcs se raccorderont en *b*; ce qui n'aurait pas lieu si *ob* n'était pas égal à *co*.

Toutes les coupes qui auront lieu sur l'arc *ab* devront être dirigées vers le point *m*, et toutes celles de l'arc *bc* concourront au point *n*.

292. On peut encore faire des arcs rampants avec des courbes à deux ou plusieurs centres plus ou moins surhaussées.

293. Enfin on peut prendre pour cintre une demi-ellipse rapportée à ses diamètres conjugués. Dans ce cas, les coupes devront être des normales à l'ellipse.

CHAPITRE II.

Portes biaises et en talus.

I.

294. **Définitions.** — Avant d'aller plus loin, il est utile de présenter quelques observations générales sur le but que nous nous proposons d'atteindre.

Il s'agit, comme nous l'avons pu reconnaître par quelques exemples précédents, de prendre les blocs de pierre tels qu'ils sont tirés de la terre, et, par des coupes déterminées, de leur donner la forme qui convient le mieux suivant la place qu'ils doivent occuper.

Or, la solution de ce problème se compose de deux parties :

1° Le dessin ou l'exécution de l'épure qui doit donner les dimensions de toutes les parties de la pierre ;

2° Le tracé sur la pierre même de toutes les lignes nécessaires pour la détermination des coupes.

Mais l'épure ne donne pas directement toutes les dimensions d'une pierre dans leur véritable grandeur. On sait (*Géométrie descriptive*) qu'une ligne n'est égale à sa projection, qu'autant qu'elle est parallèle au plan sur lequel elle a été projetée : ce qui n'a pas toujours lieu, et

ne peut d'ailleurs jamais exister pour les figures et les lignes qui ne sont pas planes. On doit donc, lorsque l'on commence une épure, apporter le plus grand soin dans le choix des plans de projection, et prendre, autant que possible, ces plans parallèles au plus grand nombre de lignes.

II.

295. **Porte dans un mur biais.** — Supposons que le trapèze $a'b'$, $a''b''$ (*fig.* 46, *Pl.* **13**) représente l'ouverture d'une porte percée dans un mur, dont les deux faces verticales $p'q'$, $p''q''$, ne sont pas parallèles entre elles.

On construira (*fig.* 45) la projection verticale de la porte sur un plan perpendiculaire à son axe. Le cylindre d'intrados ayant pour directrice le demi-cercle *aub*, la pénétration dans la face $p'q'$ du mur sera un demi-cercle égal au cintre, et se projettera sur le plan horizontal par la droite $a'b'$; la pénétration dans la face $p''q''$ sera une demi-ellipse dont la projection horizontale sera $a''b''$, et comme cette courbe fait partie du cylindre d'intrados, sa projection verticale coïncidera avec la courbe *aub*.

On suppose ici que la porte est renversée afin de mieux faire voir l'appareil d'intrados.

Pour tracer l'une des pierres (*fig.* 48), par exemple celle qui est à droite de la clef, on prendra sur la projection horizontale la distance $4'$—$4''$, qui représente la plus grande longueur de la pierre; puis, après avoir dressé les deux faces de tête, on y appliquera le panneau *vkkz*-5-4; et l'on taillera la pierre comme s'il s'agissait d'une porte droite (286); enfin,

en portant sur chaque arête sa véritable grandeur, qui sera donnée par la projection horizontale, on aura tous les points nécessaires pour déterminer la coupe oblique de la pierre.

Le moyen que nous venons d'indiquer présente quelques inconvénients; en effet, les appareilleurs font leurs épures, suivant la grandeur d'exécution, sur des murs dont la surface a été dressée avec soin; il faudrait donc qu'après avoir pris sur leur dessin les longueurs des arêtes, ils allassent reporter ces dimensions sur la pierre, qui est quelquefois très-loin du lieu où l'épure a été faite. On pourrait bien exprimer par des nombres la longueur de toutes les arêtes des pierres que l'on devra tracer; mais ce procédé, qui serait fort long, ne pourrait pas s'appliquer aux lignes courbes. Nous allons indiquer d'autres moyens.

La section par le plan vertical $p'q'$ étant perpendiculaire aux génératrices du cylindre qui forme l'intrados, sera la *section droite* de ce cylindre. Cette courbe, parallèle au plan vertical de projection, est projetée sur ce plan dans sa véritable grandeur. Les arcs (a, 1), (1, 2), etc., étant portés à la suite les uns des autres sur la droite $a'''b'''$ (*fig.* 47), on aura le développement de la courbe aub. Il est bien entendu que si les points de division étaient trop éloignés, il faudrait prendre d'autres points intermédiaires. Les droites (a''', a^{IV}), ($1'''$-1^{IV}) ($2'''$-2^{IV})..., perpendiculaires à $a'''b'''$, représenteront dans le développement les génératrices d'intrados. Leurs longueurs seront données par la projection horizontale de la porte, et la figure $a'''b'''a^{\text{IV}}b^{\text{IV}}$ sera le développement de la douelle.

Supposons donc, comme nous l'avons dit précédemment, que l'on ait taillé la pierre comme s'il s'agissait d'une porte droite, on construira le panneau de douelle ($4'''$, 4^{IV}, $5'''$, 5^{IV})

en carton ou en toute autre matière flexible, puis on l'appliquera dans la partie cylindrique de la pierre, en faisant coïncider l'arc ($4'''$, $5'''$) de la section droite avec l'arc correspondant à la face de tête. Enfin, appuyant légèrement sur le panneau, on lui fera prendre la courbure de la pierre, et l'on tracera dans la douelle l'arc correspondant à la face biaise.

On construira ensuite, dans leur véritable grandeur, les panneaux de joints provenant des coupes $5z\ 4v$ (*fig.* 45), et l'on appliquera ces panneaux à droite et à gauche sur les deux faces adjacentes à la douelle, ce qui suffira pour déterminer la coupe oblique.

On peut disposer l'épure comme on le voit (*fig.* 47); on a supposé que chaque panneau de joint avait tourné autour de l'arête d'intrados pour se rabattre sur le développement de la douelle.

La construction de ces panneaux ne présente pas de difficulté. Ainsi, par exemple, pour celui qui coupe la douelle suivant l'arête ($4'4''$), on prendra sa largeur $4v$ (*fig.* 45), et l'on portera cette largeur de $4'''$ en v''' sur $a'''b'''$ (*fig.* 47), puis on construira la droite $v'''v^{\text{IV}}$ égale à $v'v''$ (*fig.* 46); il n'y aura plus qu'à tracer le quatrième côté $4^{\text{IV}}v^{\text{IV}}$.

Les autres panneaux se construiront de la même manière.

On pourrait encore relever sur l'épure et appliquer sur la pierre le panneau horizontal $v'v''h'h''$; mais cela n'aurait d'autre but que de compléter le tracé de la coupe oblique; car trois points suffisant pour déterminer un plan, il est évident que la douelle et un seul panneau de joint pourraient diriger le travail de l'ouvrier.

III.

296. **Porte dans un mur en talus.** — Le cintre de la porte étant supposé le même que dans l'exemple précédent, nous pouvons nous servir de la même projection verticale (*fig.* 45).

La droite op''' est la section de la face du talus par le plan vertical $p'p''$. Cette section, rabattue à gauche sur le plan vertical de projection, est déterminée par l'inclinaison plus ou moins grande que l'on veut donner au talus.

Dans la projection horizontale (*fig.* 49) la porte est vue en dessus.

Pour construire la projection horizontale d'un point du talus, du point 2 par exemple, on concevra par ce point (*fig.* 45) une ligne horizontale (2, 2') située dans la face du talus. Cette ligne rencontrera la droite op''' en un point 2' projeté horizontalement sur $o'p^{IV}$, et ramené par un arc de cercle horizontal dans le plan $p'p''$. Enfin, une parallèle à la trace du talus fera connaître la projection horizontale du point 2. Les autres points du talus se construiront de la même manière.

Le développement de la douelle et la construction des panneaux de joints (*fig.* 50) se feront comme dans l'exemple précédent.

La porte étant symétrique on s'est contenté de construire la moitié de la douelle et des panneaux qui, étant retournés, peuvent servir pour les deux côtés.

IV.

297. **Porte dans un mur biais et en talus.** — Cet exemple est une combinaison des deux précédents; l'inspection de l'épure indiquera suffisamment la manière de construire la projection horizontale (*fig.* 52), ainsi que les panneaux de joints et le développement de la douelle (*fig.* 53).

Pour tailler les pierres de ces deux derniers exemples, on s'y prendra comme pour celles de la porte biaise.

V.

298. **Passage et Berceau biais.** — La figure 55 représente un passage biais dans un mur droit; *ab* est la section droite. Enfin la figure 56 est un berceau oblique compris entre deux murs parallèles. Nous ne nous arrêterons pas à ces deux cas, qui rentrent dans les exemples précédents, et qui d'ailleurs présentent quelques inconvénients dont nous parlerons bientôt.

VI.

299. **Plates-Bandes dans une tour ronde.** — Les figures 1 et 4, *PL.* **14**, sont les deux projections d'une platebande dans un mur en tour ronde.

La figure 2 est le développement des panneaux de tête situés dans le cylindre intérieur, et la figure 3 contient le développement de ceux qui sont dans le cylindre extérieur.

Les panneaux de joints sont rabattus sur le plan horizontal *op*, en tournant autour de l'horizontale projetante du point *o*.

VII.

300. **Porte dans une tour ronde.** — Les figures 5 et 7 sont les deux projections verticale et horizontale de la porte.

Les panneaux de joints sont rabattus sur le plan horizontal $o'p'$.

La figure 6 contient le développement de la douelle.

VIII.

301. **Berceau biais pénétrant dans un mur.** — Soit (*fig.* 57, *PL.* **15**) la section droite d'un berceau pénétrant dans un mur compris entre les deux plans verticaux $p''q''$, $p'''q'''$ (*fig.* 58). On ne prolongera l'extrados du berceau que jusqu'au plan vertical $p''q''$, et pour l'épaisseur du mur on adoptera l'appareil de la figure 59, qui représente la face $p'''q'''$ du mur, rabattue sur le plan horizontal. Les arêtes du berceau, prolongées jusqu'au plan vertical $p'''q'''$, donneront tous les points de la pénétration. La hauteur de chaque point sera donnée par la figure 57. La

courbe de cette pénétration est une demi-ellipse ; si l'on voulait qu'elle fût circulaire, il faudrait commencer par construire cette figure et en déduire la première en faisant les constructions dans un ordre inverse. On remarquera que les coupes de joints, dans la figure 59, étant dirigées vers le centre de l'ellipse, ne seront pas perpendiculaires à la courbe. Si, pour plus de régularité dans l'appareil extérieur, on voulait satisfaire à cette dernière condition, il est évident qu'alors les plans des joints ne seraient plus perpendiculaires à l'intrados du berceau. Les coupes $q''u''$, $q'''u'''$, etc., perpendiculaires aux faces du mur, ont pour but d'éviter les angles aigus.

Supposons que l'on veuille tracer la pierre de la seconde assise à droite, on taillera à la distance de la plus grande hauteur de la pierre deux faces parallèles suivant le contour du panneau horizontal $5'q'q''u''u'''q'''5''$ (*fig.* 58). La pierre étant ainsi préparée, on construira le panneau $5ochkz6$ (*fig.* 57), et l'on appliquera ce panneau sur la face verticale $q'5'$, correspondante à la section droite du berceau. On construira pareillement le panneau $5'''o'''c'''h'''k'''z'''6'''$ (*fig.* 59), que l'on reportera sur la face oblique du mur, puis on abattra toute la pierre excédante. Il ne restera plus (*fig.* 61) qu'à faire disparaître la petite portion d'extrados $u''o''c''u'''o'''c'''$; pour cela on pourra prendre (*fig.* 60) le panneau de joint $5^{v}o'o''u''u'''5^{iv}$, que l'on portera sur la face correspondante de la pierre (*fig.* 61); enfin, joignant $u'''h'''$ et faisant $c''c'''$ égal à $u''u'''$, toutes les coupes seront déterminées.

Il est évident que la figure 60, qui représente le développement de la douelle et les panneaux de joints, se construira comme dans les exemples précédents.

Pour tailler la clef (*fig.* 62) on appliquera les panneaux

($mn34$) (*fig.* 57) et ($m'''n'''3'''4'''$) (*fig.* 59) sur les faces correspondantes à la section droite du berceau et à la surface du mur; puis, après avoir abattu la pierre suivant le contour de ces deux panneaux, on portera les panneaux de joints à droite et à gauche de la douelle; enfin, on taillera (*fig.* 62) l'extrados du berceau, perpendiculairement au plan de la section droite, en suivant le contour de l'arc sx, et s'arrêtant au plan vertical $m''n''s''x''$, ou bien on taillera, suivant la droite $m''n''$, un petit plan vertical sur lequel on placera le panneau $m'''n'''s''x''$ donné par la figure 59, et les deux courbes sx, $s''x''$ seront les directrices de la surface cylindrique formant l'extrados du berceau.

IX.

302. **Autre solution du même problème.** — Pour ne pas distraire l'attention, nous n'avons pas parlé des angles aigus formés par la pénétration des portes ou berceaux dans les murs biais ou en talus.

Lorsque l'inclinaison du mur par rapport au berceau sera peu considérable, on pourra se contenter des moyens précédents; mais lorsqu'il y aura beaucoup de biais, on opérera comme nous allons l'indiquer.

Soit (*fig.* 63) la projection horizontale d'un berceau pénétrant dans le mur compris entre les deux plans verticaux $p''q''$, $p'''q'''$. La section droite du berceau étant, comme dans l'exemple précédent, représentée par la figure 57, on conduira d'abord les génératrices d'intrados jusqu'au plan vertical $p''q''$; puis, à partir de ce plan on les dirigera perpendiculairement à la surface du mur; de sorte que le

berceau lui-même sera brisé, et qu'il aura pour entrée un petit berceau perpendiculaire au mur de face. Si, comme nous l'avons supposé, la section droite du berceau principal est un demi-cercle, la pénétration dans le mur sera une demi-ellipse ayant pour axe horizontal $a'''b'''$, et pour axe vertical la hauteur du berceau. On construira cette ellipse soit par ses axes, soit en rabattant comme précédemment chacun de ses points, et prenant les hauteurs sur la figure 57. La courbe $a'''b'''$ étant rabattue sur le plan horizontal, on prendra $a'''i$ pour rayon, et du point e comme centre, on décrira un arc de cercle qui déterminera les foyers F, F'. Joignant ces points avec le point 1^{v}, on aura deux rayons vecteurs $F1^{v}$, $F'1^{v}$, et la droite $1^{v}—y$, qui partage en deux parties égales l'angle $F1^{v}F'$, sera normale à l'ellipse et représentera par conséquent le plan de joint du petit berceau. On opérera de la même manière pour les autres joints. Enfin, faisant les hauteurs d'assises égales à celles du berceau principal, l'appareil dans le plan vertical $p'''q'''$ sera complétement déterminé.

La figure 65 représente la pierre à droite de la seconde assise; on taillera d'abord deux faces horizontales suivant le contour du panneau $5'q'q''q'''5'''5''$ (*fig.* 63), puis on appliquera le panneau $5ochkz6$ (*fig.* 57) sur la face correspondante à la section droite, et le panneau $5^{v}u'''h'''k'''z'''6^{v}$ (*fig.* 64) sur celle qui correspond à la face du mur. On fera ensuite des coupes perpendiculaires aux plans de ces panneaux, en ayant soin toutefois de ne pas prolonger ces coupes, de part et d'autre, au delà du plan vertical $p''q''$. On pourra donner plus de précision au travail, en taillant d'abord la face horizontale $c'c''u''u'''h'''h''h'$ (*fig.* 65), puis le petit plan vertical sur lequel on placera le panneau $c''o''v''$ donné par la figure 64. On peut aussi faire usage des panneaux de douelle ou de joints, que l'on construira comme dans l'exemple qui précède.

X.

303. **Passage biais.** — La figure 66 présente deux exemples de berceaux pénétrant dans des murs qui ne sont pas parallèles. Le premier berceau A, perpendiculaire au plan *pq*, qui partage l'angle des murs en deux parties égales, est terminé par deux arcs droits, comme dans l'exemple précédent. Le second exemple se compose de deux berceaux B, C perpendiculaires aux murs donnés, et qui viennent se raccorder par un arc vertical *ab* situé dans le plan *pq*. Cette dernière combinaison mérite toute l'attention du lecteur.

CHAPITRE III.

De l'arêtier.

I.

304. **Définitions.** — Le berceau A (*fig.* 67) étant coupé par le plan vertical pq, la section sera une ellipse verticale projetée sur le plan horizontal par la droite $a''b''$. On peut prendre cette ellipse pour directrice du cylindre d'intrados d'un second berceau B, de sorte que l'espace compris entre les deux murs $aa''a'''$, $bb''b'''$ sera couvert par un berceau coudé, ou, si l'on veut, par deux berceaux qui se raccorderont suivant l'ellipse verticale $a''b''$. Si le plan pq partage en deux parties égales l'angle $aa''a'''$, les sections droites des deux berceaux seront égales : dans le cas contraire, il faudra construire la section droite du second berceau, en opérant comme nous l'avons fait pour construire la figure 59.

305. On nomme *arêtier* la courbe verticale $a''b''$, suivant laquelle les deux berceaux se rencontrent.

306. Si l'on regarde de l'intérieur de la voûte, on verra que toute la moitié $a''c''$ de l'arêtier forme un angle saillant

qui s'efface à mesure qu'il approche du point c'', et qui devient au contraire rentrant pour l'autre moitié $c''b''$ de l'arêtier.

307. La pierre (*fig.* 68) appartient à la partie saillante de l'arêtier. On taillera d'abord, d'après la hauteur de la pierre, deux faces parallèles en suivant le contour du panneau de projection horizontale $s's''s'''$, $1'$, $1''$, $1'''$, puis on appliquera le panneau de tête *asuvo*1 sur les deux faces verticales $s'1'$, $s'''1'''$, correspondantes aux sections droites des deux berceaux. En faisant des coupes suivant le contour de ces deux panneaux et perpendiculairement à leurs plans, la pierre sera taillée.

308. Pour la pierre (*fig.* 69) appartenant à la partie rentrante de l'arêtier, on taillera les deux faces horizontales suivant le contour $t't''t'''$, $4'$, $4''$, $4'''$, et l'on appliquera le panneau de tête *btxzi*4 sur les faces $t'4'$, $t'''4'''$, puis on fera les coupes perpendiculairement aux plans de ces panneaux.

309. Si, comme nous l'avons supposé ici, les deux berceaux sont égaux, toutes les coupes perpendiculaires aux panneaux de tête doivent se rencontrer dans le plan vertical *pq* qui contient l'arêtier. Cela n'aurait pas lieu si les deux berceaux étaient inégaux.

II.

310. **Voûtes d'arête.** — Dans l'exemple précédent, les cylindres formant les intrados des deux berceaux se ren-

contrent suivant une courbe plane et verticale. Cette circonstance se rencontrera souvent dans la pratique.

311. Concevons, en effet (*fig.* 73, *Pl.* **16**), deux cylindres horizontaux A, B, ayant pour directrices ou pour sections droites les deux ellipses verticales *vku*, *nxz*, que nous supposons ici rabattues sur le plan horizontal. Si nous prenons sur ces ellipses deux points *a* et *b* qui soient situés à la même hauteur, et que par ces points nous concevions les deux génératrices $a'a''$, $b'b''$, ces deux lignes étant situées dans un même plan horizontal, se couperont en un point *m* qui fera partie de l'intersection des deux cylindres.

Or on sait que si deux ellipses ont le même axe vertical, et que l'on prenne sur ces courbes deux points à la même hauteur, les ordonnées abaissées de ces points sur les axes horizontaux, partageront ces axes en parties proportionnelles.

Il résulte de là, que si les axes verticaux *ok*, *tx* sont égaux, et que les points *a*, *b*, soient à la même hauteur, on aura

$$va' : a'u :: nb' : b'z,$$

ou bien

$$sc : a''u' :: cm : ma'';$$

donc les deux triangles scm, $ma''u'$ sont semblables; d'où il résulte que les trois points smu' sont en ligne droite; et comme on peut faire le même raisonnement pour tout autre point de la pénétration, on est en droit de conclure que la projection de cette courbe se confondra avec la diagonale du rectangle $sdv'u'$, et que par conséquent la pénétration se compose de deux ellipses verticales su', dv', qui se coupent au point o'.

312. Si nous supprimons les parties du cylindre A, qui couvraient les espaces triangulaires *so'd*, *v'o'u'*, on aura A', A' (*fig.* 74) pour les projections horizontales de ce qui resterait. Pareillement B', B' représentent ce qui resterait du cylindre B, si l'on en retranchait les parties *do'u'*, *so'v'* (*fig.* 73). Or, si nous supposons maintenant que l'on rapproche les figures A', A', B', B' de manière que les parties restantes du cylindre A viennent occuper la place des parties du cylindre B qui ont été supprimées, la réunion de toutes ces parties de cylindres formera la voûte à laquelle on a donné le nom de *voûte d'arête*.

La figure 75 représente l'appareil vu de l'intérieur. Les deux ellipses verticales provenant de l'intersection des deux cylindres A et B sont projetées horizontalement par les deux diagonales *vz*, *su* : elles forment quatre *arêtiers* à angles saillants, qui, partant des angles des murs, viennent se réunir au *centre de la voûte*.

Les pierres qui forment les voûtes des berceaux A et B ne différant pas de celles des berceaux ordinaires : nous allons nous occuper principalement de l'appareil de l'arêtier.

313. Pour faciliter l'explication de ce qui va suivre, nous conviendrons de nommer *arêtes* ou *génératrices d'intrados* celles qui proviennent de l'intersection de l'intrados d'un berceau avec les plans de joints. Nous nommerons *arêtes d'extrados* celles qui résultent de l'intersection des plans de joints avec l'extrados; enfin, arêtes *intérieures* celles qui sont dans l'épaisseur du mur et qui proviennent de l'intersection de deux surfaces non apparentes. Ainsi (*fig.* 75), l'arête qui contient le point *a* sera une *arête d'intrados;* celle du point *b* est une arête d'extrados, et celle qui passe par le point *c* est une arête intérieure.

III.

314. **Appareil de l'arêtier.** — Soit (*fig.* 77) $a'c'$ la projection horizontale de l'arêtier provenant de la rencontre des deux berceaux A et B dont la hauteur verticale est la même.

Si l'un des deux berceaux, A, par exemple, est circulaire ou plein cintre, on commencera par construire sa section droite (*fig.* 72). Les arêtes d'intrados a, 1, 2, 3, 4, rencontreront l'arêtier en des points qui appartiendront au second berceau B, et qui, projetés sur un plan perpendiculaire à sa direction, donneront (*fig.* 76) la courbe $a''5''$, qui est la section droite du cylindre d'intrados.

Les hauteurs des points $1''$, $2''$, $3''$, $4''$, seront les mêmes que pour le cylindre A, et seront données par la figure 72.

Par les points $1''$, $2''$, $3''$, $4''$ (*fig.* 76), on construira des normales à l'ellipse $a''5''$, et l'on terminera ces normales aux points z'', o'', s'', t'', dont les hauteurs seront les mêmes que pour les points correspondants du premier berceau ; les points v'', u'', x'', se détermineront, en faisant les hauteurs d'assises du second berceau égales à celles du premier.

Les deux figures 72 et 76 suffisent pour construire la voûte ; mais si l'on veut compléter la projection horizontale, on opérera comme il suit :

L'arête passant par le point v (*fig.* 72), et celle du point v'' (*fig.* 76) étant à la même hauteur, se couperont en un point v' (*fig.* 77) ; joignant ce point avec le point $1'$ de l'a-

rêtier, on aura la droite ($1'$—v'), qui est l'intersection du plan de joint $1v$ du premier berceau avec le plan de joint $1''v''$ du second. Si l'on prolonge ces deux plans, ils couperont les cylindres formant les extrados prolongés des deux berceaux en deux droites projetées par les points z et z''; et ces droites appartenant aux deux plans de joints $1v$, $1''v''$, le point z' où elles se coupent doit se trouver dans le prolongement de $1'$—v'.

Les points o', s', t' se détermineront de la même manière; la ligne $z'c'$ est l'intersection des extrados des deux berceaux.

315. Les pierres de l'arêtier se tailleront comme nous l'avons dit (307 et 308). Ainsi, par exemple, pour la pierre de la troisième assise, on équarrira (*fig.* 81) un parallélipipède ayant pour base le rectangle $h''3^{\text{VI}}3'3^{\text{VII}}$ (*fig.* 77), qui est la projection horizontale de la pierre, et pour hauteur hh' (*fig.* 72), puis on lèvera le panneau de tête $nn'u23sx$, que l'on placera sur la face verticale $h''3^{\text{VI}}$ correspondante à la section droite du berceau A. De même on prendra (*fig.* 76) le panneau $n'''n^{\text{IV}}u''2''3''s''x''$, que l'on placera sur la face $h''3^{\text{VII}}$ correspondante à la section droite du berceau B; puis, en faisant des coupes perpendiculaires aux plans de ces panneaux et suivant leurs contours, la pierre sera taillée. On pourrait augmenter la précision du travail en portant d'abord le panneau de tête du berceau A sur les deux faces opposées du parallélipipède. Puis, après avoir taillé dans toute la longueur de la pierre la surface cylindrique appartenant au berceau A, on prendrait (*fig.* 80) le panneau $2'''2^{\text{IV}}3'''3^{\text{IV}}$ qui représente le développement de douelle, et lui faisant prendre la courbure de la pierre, on tracerait l'arc de l'arêtier, qui, avec l'arc de tête du berceau B, feraient deux directrices pour la seconde surface cylindrique.

La correspondance des lettres (*fig.* 81) suffit pour faire reconnaître la disposition des panneaux.

IV.

316. **Autre méthode.** — Les moyens que nous avons employés jusqu'à présent composent ce que l'on appelle la *méthode par équarrissement*. On voit qu'ils consistent à préparer une pierre dont les faces, rectangulaires entre elles, deviennent en quelque sorte des plans de projection sur lesquels on porte les traces des plans ou surfaces courbes qui doivent déterminer toutes les coupes.

Il existe une autre méthode que nous allons indiquer.

317. Supposons (*fig.* 72) que les points 3 et 4 soient joints par une ligne droite, et que l'on fasse glisser cette droite parallèlement à elle-même sur les deux arêtes d'intrados 33′ et 44′, la portion de la douelle comprise entre ces deux arêtes sera remplacée par un plan. Faisons la même supposition pour la portion de douelle comprise entre les arêtes 3″ et 4″ du second berceau. Les deux douelles plates que l'on obtiendra par ce moyen viendront se couper suivant une ligne droite, dont la projection horizontale se confondra avec celle de l'arêtier. Rabattons actuellement l'arêtier sur le plan horizontal, en prenant la hauteur de chaque point sur la figure 72. La droite $3^v - 4^v$ représentera dans ce rabattement l'intersection des deux douelles plates, et les arêtes d'intrados 3^v3^v, 4^v4^v seront parallèles à la projection horizontale $a'c'$ de l'arêtier. Or, si par le point m, ou tout autre point de la droite $3^v,4^v$, on conçoit un plan mp qui lui soit

perpendiculaire, ce plan contiendra l'angle que les deux douelles plates feraient entre elles, et l'on aura cet angle dans sa véritable grandeur $vm''q$, en le faisant tourner autour de l'horizontale vq, jusqu'à ce que son sommet soit venu se placer en m''.

318. Cela étant fait, on prendra (*fig.* 1) un bloc que l'on jugera au coup d'œil pouvoir contenir la pierre que l'on se propose de tailler, puis on dressera deux faces faisant entre elles l'angle $vm''q$ que nous venons de trouver pour l'inclinaison des deux douelles plates, et l'on tracera sur ces deux faces les quadrilatères formant le contour de ces douelles, soit en les décomposant en triangles, soit par tout autre moyen. On fera ensuite perpendiculairement à la douelle 3, 4, 3', 4' le plan 3, 4, s, t sur lequel on appliquera le panneau A; puis on fera le plan 3'', 4'', 5'', t'' sur lequel on tracera le panneau B; toutes les coupes seront alors déterminées, on abattra la pierre tout autour de ces panneaux suivant les angles que les joints doivent faire avec les douelles, toujours supposées plates; ces angles se prennent avec un instrument nommé *beuveau*, formé de deux morceaux de bois mince, que l'on cloue solidement. On fait glisser le beuveau en maintenant son plan perpendiculaire à l'arête.

Quand les coupes de joints sont faites, on trace l'extrados, d'après l'épaisseur que l'on veut donner à la voûte, puis on creuse les douelles suivant la courbure des cylindres dont elles font partie.

319. On peut encore opérer de la manière suivante. On dressera d'abord (*fig.* 2) le plan 3, 4, 3', 4', sur lequel on tracera le quadrilatère appartenant à la douelle du berceau A; puis, après avoir pris à l'aide d'un beuveau l'angle H sur la

figure 72, on taillera le plan 3-*y*, qui doit contenir l'arête 3′—3″ du berceau B.

Ensuite, perpendiculairement à la droite 3′, 3″, on fera le plan 3″, 4″,*s*″*t*″, sur lequel on tracera le panneau de section droite B. Enfin le panneau A étant appliqué sur le plan 3, 4, *t r*, perpendiculaire à la face de douelle 3, 4, 3′ 4′, toutes les coupes seront déterminées.

320. La méthode que nous venons d'indiquer exige plus de pierre, parce que l'on n'aperçoit pas aussi bien, au premier coup d'œil, quel est le plus petit bloc capable de contenir le voussoir que l'on veut tailler.

D'ailleurs, à l'inspection de la figure 72, il sera facile de reconnaître que pour tailler la quatrième pierre en employant la méthode par équarrissement, le parallélipipède capable de contenir le voussoir aura deux de ses faces horizontales, tandis que si l'on emploie la méthode par beuveau, le bloc de pierre ayant pour projection le rectangle incliné, sera évidemment plus fort que le premier, les longueurs étant les mêmes dans les deux cas.

Mais, d'un autre côté, par le second moyen, on épargne une partie du travail de l'ouvrier, qui ne taille que les faces mêmes de la pierre, tandis que dans la méthode par équarrissement il fallait préparer les faces du parallélipipède rectangle, pour y tracer le contour des panneaux. L'habitude et la pratique feront juger, dans chaque cas, laquelle de ces deux méthodes offre le plus d'économie.

321. Nous nous sommes étendu assez longuement sur l'appareil de l'*arêtier*, parce que cette combinaison se représentera par la suite sous toutes sortes de formes, et pour ré-

sumer ce que nous venons de dire, nous ferons remarquer que dans une pierre d'arêtier les lignes ou arêtes principales sont :

1° L'*arêtier intérieur* ou *d'intrados*, provenant de l'intersection des douelles ou intrados des deux berceaux;

2° L'*arêtier extérieur* ou *d'extrados*, provenant de l'intersection des deux extrados ;

3° L'*intersection des plans de joints inférieurs;*

4° L'*intersection des plans de joints supérieurs.*

Nous remarquerons encore que l'angle formé par les douelles, qui est droit dans le plan de naissance, augmente à mesure que l'on s'approche du centre de la voûte, et qu'à ce point il s'efface entièrement : on peut se convaincre de cette vérité en mesurant cet angle des hauteurs différentes.

V.

322. **Voûtes d'arêtes avec arcs doubleaux.** — On commencera par la section droite du berceau circulaire A (*fig.* 82, *Pl.* **17**), et l'on construira, comme dans l'exemple précédent, la courbe qui forme le cintre du second berceau B, on fera les plans de joints perpendiculaires à la douelle et les arêtes d'extrados à la même hauteur que celles du premier berceau. Pour tracer la saillie de l'arc doubleau, on prolongera les normales dans l'intérieur de la courbe $a''4$ d'une quantité $a''c''$ égale à ae, de sorte que les deux courbes $a''4$, $c''i$, soient parallèles entre elles, et que la saillie soit la même par-

tout. Le reste de la projection horizontale ne présentera plus la moindre difficulté.

Quand l'épure sera terminée, on taillera la pierre (*fig.* 85) comme s'il s'agissit d'un arêtier simple, puis, avec une règle flexible, que l'on appliquera sur les douelles et perpendiculairement aux arêtes d'intrados, on tracera les deux arcs *te*, *t''e''*, et l'on évidera la pierre, d'équerre avec la douelle, jusqu'à ce que l'on puisse appliquer les deux petits panneaux *a*1*te* (*fig.* 82) et *a''*1*t''e''* (*fig.* 84); enfin, taillant perpendiculairement aux plans de ces deux panneaux, les petites surfaces cylindriques *a*, 1, 1, leur rencontre déterminera la forme de l'arêtier.

On pourrait aussi, pour donner plus de précision aux coupes, appliquer sur la pierre les panneaux de joints (*tvv*11*t*) (*t''v''v''*11*t''*) dont les largeurs *tv*, *t''v''*, seraient données par les *fig.* 82 et 84, et la longueur des arêtes par la projection horizontale (*fig.* 83).

Les mêmes procédés seront employés pour tailler la pierre (*fig.* 86).

VI.

323. **Voûte à double arêtier.** — Quelquefois on fait deux arêtiers qui, partant de l'angle du pied-droit (*fig.* 87), s'écartent l'un de l'autre et viennent aboutir aux angles d'un quadrilatère *m'pgs*, dont la grandeur est arbitraire, mais dont les côtés doivent être, pour plus de régularité, parallèles aux diagonales du rectangle formé par la voûte principale.

Il est évident qu'une pareille voûte n'est autre chose que la pénétration des deux berceaux A (*fig.* 82) et B (*fig.* 88) par un troisième berceau C, dont la section droite est rabattue sur le plan horizontal (*fig.* 89). Les directions des trois berceaux détermineront les arêtes d'intrados, que l'on construira en commençant par celles du berceau A (*fig.* 82).

On taillera la pierre (*fig.* 90) comme pour un arêtier simple, en se servant des panneaux de tête des berceaux A et B, et l'on tracera dans les douelles correspondantes les arcs (1, 2), (1, 2), qui doivent former les deux arêtiers, puis on prendra ces courbes pour directrices de la troisième surface cylindrique 1, 1, 2, 2. Enfin, pour tailler le petit plan 2, 2, *u*, perpendiculaire à cette surface, on fera usage d'un beuveau donné par la figure 89.

Si l'on veut donner plus de précision au tracé des courbes 1, 2, 1, 2, on construira les panneaux de développement des douelles des berceaux A et B, ainsi que les panneaux de joints correspondants.

La clef formée par le quadrilatère *m'pgs* est entièrement plate, et l'on devra, par cette raison, donner aux coupes latérales *mn* (*fig.* 89) une légère inclinaison, car il est évident qu'en faisant ces coupes normales à l'intrados, elles seraient verticales, ce qui ne pourrait pas tenir.

On pourrait croire qu'en faisant un double arêtier, on a pour but de rendre moins aigu l'angle formé par la rencontre des deux berceaux A et B; mais il est évident que la combinaison précédente ne produira pas cet effet, puisque l'arêtier ne se trouve tronqué que dans la partie supérieure de la voûte, où l'angle est moins saillant que dans le plan de naissance.

324. Si donc on voulait faire disparaître l'angle trop aigu d'un arêtier, il est évident qu'on y parviendrait en tronquant le pied-droit (*fig.* 93, *Pl.* **18**) par un plan vertical et faisant partir des angles a', a'' deux arêtiers qui viendraient se réunir au centre de la voûte, au lieu de s'écarter comme dans l'exemple précédent.

Cette construction ne présentant aucune difficulté, nous ne nous y arrêterons pas davantage.

La figure 94 est une voûte d'arête sur un hexagone régulier. Les douze arêtiers de cette voûte proviennent des pénétrations des trois berceaux ou cylindres principaux A, B, C, par trois autres cylindres a, b, c.

La figure 95 représente la clef.

325. La figure 96 est une voûte d'arête construite sur un quadrilatère irrégulier *ouvz*.

Les deux droites *mn*, *pq*, qui joignent les milieux des côtés opposés, se coupent en un point x, qui sera le point le plus élevé de la voûte. Les droites *xo*, *xu*, *xv*, *xz*, sont les projections de quatre arêtiers qui proviennent des intersections de quatre cylindres A, B, C, D, parallèles aux lignes *mn*, *pq*, et dont les sections droites a, b, c, d, sont rabattues sur le plan horizontal. Enfin les figures e, f, g, h, sont les sections droites de quatre berceaux qui par leur rencontre avec les cylindres formant la voûte d'arête, déterminent quatre arêtes *ou*, *oz*, *zv*, *vu*, dont les projections horizontales se confondent avec les côtés du quadrilatère donné.

326. Pour construire une voûte surbaissée, on peut quelquefois remplacer les berceaux elliptiques (*fig.* 76) par deux

demi-berceaux circulaires (*fig.* 97), écartés l'un de l'autre d'une certaine quantité *vu*, que l'on couvrira par une voûte plate appareillée comme nous l'avons dit (274).

Dans ce cas, on construira le sommet d'un triangle équilatéral *vuz*, et l'on fera concourir au point *z* tous les joints compris dans l'angle *vuz;* les autres joints seront dirigés vers les points *v*, *u*.

VII.

327. **Voûte en arc de cloître.** — Supposons que l'on veut couvrir l'espace rectangulaire *a'b'm'n'* (*fig.* 99, *Pl.* **19**), compris et renfermé entre quatre murs droits, on construira les deux diagonales *a'n'*, *b'm'*, qui se coupent au point *c'*; les triangles *a'c'm'*, *b'c'n'* seront couverts par des parties d'un berceau circulaire A, projeté verticalement (*fig.* 98), et les parties de voûte *a'c'b'*, *m'c'n'*, appartiendront à un berceau elliptique B, rabattu (*fig.* 100). Les deux berceaux se pénétreront suivant deux ellipses dont les projections horizontales se confondront avec les diagonales du rectangle *a'b'm'n'*; ces deux courbes formeront, dans les angles de la salle, quatre arêtiers rentrants qui viendront aboutir au point *c'*.

Les cylindres d'extrados se rencontrent suivant deux courbes *z'p'*, *t'q'*, qui formeront à l'extérieur des arêtiers saillants.

Dans le cas d'une salle carrée, les arêtiers intérieurs et extérieurs seraient dans un même plan vertical et leurs projections horizontales se confondraient.

On donne à cette espèce de voûte le nom de *voûte en arc de cloître;* on voit qu'elle diffère de la voûte d'arête ordinaire (310) en ce que les arêtiers, qui sont saillants dans l'une de ces voûtes, sont rentrants dans l'autre; cela provient de ce que les parties qui dans l'une étaient couvertes par le cylindre A, se trouvent dans l'autre faire partie du cylindre B. Aussi peut-on dire, dans le cas où l'espace à couvrir serait le même, que la voûte arc de cloître se compose des parties de berceaux que l'on a supprimées pour former la voûte d'arête.

Le tracé de la pierre ne présente aucune difficulté. Après avoir préparé le parallélipipède d'après la projection horizontale, on appliquera (*fig.* 101) les deux panneaux de tête *a1vd*, *a"1"v"d'*; et les coupes perpendiculaires aux plans de ces panneaux détermineront les douelles, les plans de joints, ainsi que l'arêtier.

Les figures 102 et 103 sont les projections verticale et horizontale d'une voûte en arc-de-cloître, construite sur un hexagone régulier; les six arêtiers rentrants de cette voûte proviennent de la pénétration de trois cylindres égaux A, B, C. La figure 102 est la section droite du cylindre A.

La figure 104 est la seconde pierre de l'arêtier.

Les figures 105 et 106 sont les deux projections d'une voûte en arc-de-cloître surbaissée. Les arêtiers sont formés par la rencontre des cylindres circulaires A, A, avec les cylindres B, B. Les coupes des plafonds se détermineront comme nous l'avons dit (274, 326).

328. Les figures 107 et 108 représentent une voûte en

arc-de-cloître surhaussée; le cintre intérieur est formé par deux arcs *ab*, *cd*, décrits des points *v*, *u*, comme centre.

La partie supérieure de la voûte peut être remplacée par un vitrage : dans ce cas, on devra appareiller la dernière assise comme on l'a fait pour les plates-bandes; car sans cela les pierres ne seraient pas soutenues.

CHAPITRE IV.

Lunettes.

I.

329. **Définitions.** — Nous avons, suivant l'usage, donné le nom de voûte d'arête à l'espace couvert par la combinaison des deux berceaux d'égales hauteurs ; nous avons vu de plus, que lorsque les directrices de ces berceaux sont des cercles ou des ellipses, les arêtiers sont des courbes planes et verticales.

Si l'un des deux berceaux était moins élevé que l'autre, la courbe provenant de leur pénétration serait à double courbure (c'est-à-dire qu'elle participerait des courbures des deux cylindres), et la projection horizontale se composerait de deux courbes *abc*, *deh* (*fig.* 109, *Pl.* **20**).

Dans ce cas, on donnerait le nom de lunette à la pénétration du petit cylindre dans le grand. Nous allons nous occuper de cette combinaison, qui, comme on le voit, a beaucoup d'analogie avec la voûte d'arête, dont elle ne diffère que par la différence de hauteur des deux cylindres.

Nous conserverons le nom d'arêtier à la courbe provenant de la pénétration, et nous ne nous occuperons que des pierres

qui forment la rencontre des deux voûtes, les autres ne différant pas de celles des berceaux ordinaires.

II.

330 **Lunette droite.** — Étant donnés (*fig.* 110) les axes AC, BC des deux berceaux, ainsi que leur largeur et hauteur, on construira (*fig.* 111) la section droite du berceau A et (*fig.* 112), celle du berceau B, que l'on supposera rabattue dans la position du plan *p*, en tournant autour de la verticale qui contient le point 4.

Les points *a*″, 1, 2, 3, de la lunette, étant projetés sur la trace horizontale du plan *p* et ramenés à leur place en tournant autour de la verticale du point 4, on aura les projections horizontales des arêtes d'intrados du petit berceau. Les projections verticales de ces mêmes arêtes seront parallèles au plan horizontal de projection et rencontreront l'arc *ae*, fig. 111, en des points *a*, 1, 2, 3, 4, qui, projetés horizontalement sur les arêtes d'intrados du berceau BC, donneront la projection de l'arêtier, ou pénétration des deux cylindres.

Dans les exemples précédents, les arêtes d'intrados des deux cylindres étant à la même hauteur, se rencontraient sur l'arêtier ; mais ici, et c'est en cela surtout qu'une lunette diffère d'une voûte d'arête ordinaire, on concevra que, par suite de l'inégalité des deux berceaux, on ne pourrait placer les arêtes d'intrados à la même hauteur qu'en sacrifiant dans l'un ou dans l'autre la régularité de l'appareil ; on ne s'assujettira donc pas à faire rencontrer les arêtes d'intrados sur la courbe de pénétration des deux berceaux ; mais après avoir déterminé séparément et indépendamment l'un de l'autre les deux

appareils de tête (*fig.* 111 et 112), on construira les petites courbes (1*b*, 1*b'*), (2*c*, 2*c'*), (3*d*, 3*d'*), provenant des intersections du cylindre formant l'intrados du berceau AC, par les plans de joints de la lunette. Ces courbes appartiennent à des ellipses qui viennent toutes se réunir au point *m*, où l'axe BC de la lunette vient percer l'intrados du grand berceau.

Pour déterminer la projection horizontale du point *b'*, on projettera ce point en *b''* (*fig.* 112), sur la trace du plan de joint, et de là en *b'''* sur la trace horizontale du plan *p*, puis faisant tourner autour de la verticale du point 4, on obtiendra *b'* sur la perpendiculaire *bb'*, abaissée du point *b*.

Le même moyen conviendra pour déterminer un point intermédiaire entre 1 et *b*, ainsi que pour les points *c*, *d*, que l'on projettera (*fig.* 112) chacun sur la trace du joint dont il fait partie.

Les hauteurs d'assises étant égales dans les deux berceaux, l'arête horizontale projetée (*fig.* 111) par le point *s* et celle projetée (*fig.* 112) en *s''*, se rencontreront en un point dont la projection horizontale sera *s'* (*fig.* 110) et la droite (*sb*, *s'b'*) sera l'intersection des deux plans de joints (*bs*, 1*s''*). On peut vérifier cette construction en prolongeant l'arête d'intrados 1, du berceau BC, jusqu'à ce qu'elle rencontre en *u*, *u'*, le plan de joint du grand berceau, ou plus exactement encore en joignant (*fig.* 110) le point *s'* avec le point C, provenant de l'intersection des axes de deux berceaux.

331. Cette dernière construction ne conviendrait pas si les deux berceaux étaient elliptiques, parce que les plans de joints, normaux à l'intrados, ne contiendraient pas les axes des berceaux, ni par conséquent leur point de rencontre.

La projection horizontale de la première pierre étant terminée, nous allons nous occuper de la seconde, qui offre un peu plus de difficulté.

Nous remarquons d'abord que la droite projetée (*fig.* 111) par le point z, et la droite projetée (*fig.* 112) par z'', étant toutes deux dans le plan horizontal qui forme le lit supérieur de la seconde assise, se rencontreront en un point projeté horizontalement en z', et qui appartient à l'intersection des extrados des deux berceaux. L'arête d'extrados projetée en n'' (*fig.* 112), rencontrera l'extrados du grand berceau au point n, dont la projection horizontale n' fera encore partie de l'arêtier extérieur.

Les points e', h' s'obtiendront de la même manière, et l'on construira la courbe $z'h'$, qui représentera l'intersection des deux extrados. Nous dirons pour l'extrados ce que nous avons dit précédemment pour l'intrados. Les arêtes des deux berceaux n'étant pas à la même hauteur ne se rencontreront pas ; on les raccordera par le petit arc d'ellipse nv, $n'v'$, provenant de l'intersection de l'extrados du grand berceau par le plan de joint $2v''$ de la lunette. On construira la projection horizontale du point v en le projetant d'abord en v'' (*fig.* 112), puis de là en v''', et le ramenant par un arc horizontal, ce qui donnera v'.

Enfin, on joindra les deux points $v'c'$ par une ligne droite qui représente l'intersection des plans de joints des deux berceaux, et qui doit passer par le point C : ce qui complétera la projection horizontale de la seconde pierre.

On construira de la même manière les pierres supérieures, et l'on remarquera que chaque panneau de joint, excepté le premier, est limité : 1° par les deux arêtes d'intrados et d'extrados ; 2° par l'intersection des plans de joint des deux berceaux ; 3° par les deux arcs d'ellipses, suivant lesquelles le plan de joint du petit berceau coupe les deux surfaces d'extrados

et d'intrados du grand berceau. C'est surtout par ces deux arcs qu'une pierre de lunette diffère d'une pierre d'arêtier ordinaire, comme il est facile de s'en convaincre par l'inspection des figures 115 et 116, comparées avec la figure 81 de la planche 16.

La figure 113 contient les panneaux de joints dans leur véritable grandeur. On suppose que l'on a fait tourner les plans de ces panneaux autour de l'axe BC de la lunette, pour les rabattre sur le plan horizontal de projection. Les longueurs sont données par la fig. 110, et les largeurs par la figure 112. Les mêmes figures donnent aussi les longueurs et largeurs des panneaux de douelle, dont on a construit le développement (*fig.* 114).

Nous ne parlerons pas de la taille des deux premières pierres, pour lesquelles on opérera comme pour une voûte d'arête ordinaire.

Quand à la troisième pierre (*fig.* 117), on construira le parallélipipède suivant le panneau de projection horizontale; puis, après avoir taillé la douelle de la lunette et le plan du joint supérieur, on y appliquera les panneaux correspondants (*fig.* 113, 114), qui, avec le panneau de tête *cdov* (*fig.* 111), serviront à diriger les coupes de la portion de la pierre qui appartient au berceau AC; enfin, on évidera la pierre dans l'angle rentrant $nc'x$ formé par les plans des joints inférieurs, afin de pouvoir appliquer le panneau $2,2,c'v'n'n''$, donné par la figure 113. Il ne restera plus de difficulté pour les extrados, que l'on néglige même souvent dans la pratique, ou que l'on ne taille qu'à peu près.

332. Il arrive quelquefois que la lunette seule est en pierre de taille, et qu'elle vient pénétrer dans un berceau en maçonnerie. Dans ce cas (*fig.* 119) l'épure ne présente aucune difficulté.

III.

333. **Lunette biaise.** — Si la direction d'une lunette ne forme pas des angles droits avec celle du berceau principal, la lunette est biaise.

On commencera l'épure comme dans l'exemple précédent : c'est-à-dire, qu'étant données (*Pl.* **21**) la figure **121** qui représente la section droite du berceau AC, et la figure **122** qui est la pénétration de la lunette dans un mur parallèle à ce berceau, on en déduira toutes les lignes de la projection horizontale (*fig.* **120**). Mais, pour obtenir le développement de la douelle et les panneaux de joints, il sera nécessaire (*Géométrie descriptive*) de construire la *section droite* du cylindre qui forme l'intrados de la lunette; pour cela on le concevra coupé par un plan vertical perpendiculaire à l'axe BC. La section rabattue (*fig.* **123**) sur le plan horizontal donnera les largeurs de tous les panneaux de douelle et de joints. Toutes les longueurs de ces mêmes panneaux se déduiront de la figure **120**. On construira facilement la figure **124**, dans laquelle on a supposé que les panneaux de joints étaient restés attachés aux arêtes de douelle, comme dans plusieurs exemples précédents; tout le reste se fera comme pour la lunette droite.

334. Il est évident que, dans l'exemple que nous avons sous les yeux, le cylindre formant l'intrados de la lunette ne sera pas circulaire. On est quelquefois conduit à cette combinaison par la nécessité de faire une ouverture plein cintre dans un mur pénétré obliquement par un berceau ;

mais si l'on voulait avoir un berceau circulaire, il faudrait commencer par la section droite (*fig.* 123), d'où l'on déduirait les hauteurs (*fig.* 121), et tout le reste comme précédemment.

335. Au surplus, c'est plutôt comme étude que nous donnons ces irrégularités que l'on peut et que l'on doit presque toujours éviter. On y parvient ordinairement en faisant arriver le berceau oblique A (*fig.* 126) jusqu'à un plan vertical *cd*, à partir duquel la direction du berceau devient perpendiculaire à celle du cylindre B. Il est évident que la pénétration des cylindres C et B sera, par ce moyen, une lunette droite.

CHAPITRE V.

Descentes.

I.

336. **Définitions.** — Lorsqu'un berceau est incliné par rapport au plan horizontal, on lui donne le nom de *descente* ou *berceau rampant*.

337. Si la voûte a peu d'étendue en largeur et longueur, on peut se contenter de la construire exactement comme un berceau ordinaire s'appuyant sur deux murs rampants dont les assises supérieures formeraient de chaque côté la première retombée de la voûte. La section perpendiculaire à la direction de la descente donnera les panneaux de tête des claveaux courants, que l'on taillera exactement comme ceux d'un berceau ordinaire.

338. Mais, dans le cas d'un grand berceau destiné à couvrir un escalier principal, il y aurait inconvénient à placer ainsi une masse de pierres considérable sur des plans inclinés, sans prendre aucune précaution pour empêcher cette masse de couler, ou de fatiguer par son poids la voûte à laquelle elle viendrait aboutir. D'ailleurs, il arrive souvent que

les murs mêmes formant les pieds-droits de la descente, doivent être élevés à une plus grande hauteur par des assises horizontales. Voici comment il faut opérer dans cette circonstance.

Construction de l'épure. Supposons que par suite de la disposition particulière du monument, la section verticale de la descente soit un demi-cercle ayant pour rayon *ao* (*fig.* 127, *Pl.* **22**), on partagera ce demi-cercle en voussoir, et l'on déterminera l'extrados comme dans les exemples précédents; puis on construira (*fig.* 128) la projection de la descente sur un plan parallèle à sa direction.

Concevons actuellement (*fig.* 127) l'épaisseur du mur partagée en deux parties par un plan vertical *cp* parallèle à la descente. La portion intérieure suivra l'inclinaison du berceau et appartiendra aux premières retombées de la voûte, tandis que la portion extérieure restera appareillée horizontalement et disposée pour recevoir les assises supérieures du mur. Ainsi, les pierres seront en quelque sorte doubles (*fig.* 129, 130), et comme si l'on avait collé ensemble une pierre du berceau avec la pierre correspondante du mur.

339. On concevra facilement que si un appareil de ce genre a l'avantage d'empêcher les claveaux de couler, il présente des inconvénients que nous ne saurions passer sous silence : ainsi, le déchet de la pierre, et par suite l'augmentation de travail de l'ouvrier; la complication des coupes, d'où résulte nécessairement une plus grande difficulté dans la pose.

340. La disposition des coupes perpendiculaires à la

direction de la descente présente quelquefois de la difficulté. Le plus simple sera de faire les joints de la première assise par les points où les lits horizontaux du mur rencontrent la ligne de naissance de la voûte ; quant aux pierres de la seconde retombée, il sera plus difficile de donner une règle générale. Tout ce que l'on peut dire à cet égard, c'est que, pour satisfaire autant que possible à toutes les conditions d'économie et de solidité, il faut tâcher que le centre du rectangle *vuxz* (*fig.* 131) qui représente la partie rampante de la pierre soit le plus près possible du centre du rectangle *stmn* qui appartient à l'assise horizontale du mur, en ayant soin que les joints du mur et ceux du berceau soient espacés de manière à former une bonne liaison.

On fera bien de s'exercer à composer des appareils de ce genre (*fig.* 133), en variant le nombre des pierres, la grandeur du berceau et son inclinaison.

La section du berceau par un plan *ed'*, perpendiculaire à sa direction, a d'abord été ramenée dans la position verticale *ed''*, puis rabattue sur l'épure (*fig.* 134).

Taille de la pierre. Après avoir dressé le lit horizontal et deux faces verticales éloignées l'une de l'autre d'une quantité 1*h* (*fig.* 134), qui est la plus grande épaisseur de la pierre, on appliquera le panneau de projection verticale (*fig.* 132), et l'on abattra la pierre en suivant le contour de ce panneau. On fera ensuite le plan de tête *ei* perpendiculaire à la direction du berceau, et l'on appliquera sur ce plan et sur son opposé le panneau correspondant donné par la figure 134; il sera facile alors de tailler la partie rampante de la pierre. Quant à la portion horizontale, elle ne présentera aucune difficulté, et même, si l'on veut, on peut commencer par là.

Les mêmes moyens conviendront pour les pierres appartenant à la seconde assise

Les claveaux des assises supérieures se tailleront comme pour un berceau ordinaire, en se servant des panneaux de tête donnés par la figure 134.

341. Pour empêcher ces claveaux de couler, on pourrait, comme nous l'avons dit en parlant des plates-bandes, conserver sur la face du joint une partie saillante qui s'emboîterait dans une entaille de même forme que l'on ferait dans le joint de la pierre adjacente; ce qui rattacherait les pierres entre elles, de manière à ne faire en quelque sorte, de la voûte, qu'un seul et même morceau. Je dois dire cependant que si l'on prenait ce parti, la forme représentée (*fig.* 130) n'est peut-être pas celle qui conviendrait le mieux, parce que les coupes étant faites suivant la direction inclinée des claveaux, on ne pourrait, dans la pose, faire emboîter l'une dans l'autre les parties correspondantes, qu'en avançant la pierre elle-même, dans une direction inclinée; ce qui serait contraire au principe de levage. Il serait donc mieux, pour éviter cet inconvénient, de faire la petite console dans la position horizontale projetée (*fig.* 135); ce qui donnerait au poseur la facilité de faire descendre sa pierre dans une direction verticale; mais alors il ne faudrait pas oublier de conserver aux panneaux de tête (*fig.* 136) le petit trapèze 4, 5, qui est la projection de la saillie sur le plan de la section droite *cd*.

342. Il est bien entendu qu'il n'est pas nécessaire de faire des coupes de ce genre à chaque pierre, et qu'un petit nombre d'arrêts, espacés convenablement, suffiront pour donner à la voûte toute la consistance désirable.

Au surplus, c'est plutôt comme exercice que nous indiquons ces moyens auxquels il est rarement nécessaire d'avoir recours. Une coupe simple, parfaitement plane et identique pour les deux faces qui doivent s'appliquer l'une sur l'autre, en donnant plus de facilité à ce qu'on appelle le *fichage*, est souvent préférable à ces coupes compliquées, qui augmentent le travail de la taille, la difficulté de la pose et le déchet de la pierre.

II.

343. **Autre solution.** — Si l'on n'a pas de motif pour conserver horizontales les assises supérieures du mur, on pourra faire tout l'appareil du berceau dans une position inclinée; mais alors, pour empêcher les claveaux de couler, on s'y prendra comme il suit :

Construction de l'épure. Les données étant les mêmes que dans l'exemple précédent, on construira la projection verticale (*fig.* 137); puis, après avoir déterminé les coupes de la première assise, on fera celles de la seconde, de manière que la partie *uz* soit le tiers ou le quart de *ru;* et l'on interrompra les arêtes longitudinales, comme on le voit par la figure 137. Par ce moyen, chaque pierre sera double et composée d'une pierre d'une assise collée en quelque sorte à la pierre de l'assise supérieure; de sorte que chaque pierre s'accrochera sur une des pierres inférieures, et le tout ne fera en quelque sorte qu'une seule masse posée sur les plans horizontaux formant les assises du mur.

La figure 138 est la section droite, que l'on construit comme dans l'exemple précédent.

Les figures 139 et 144 font voir la manière dont les pierres sont accrochées les unes sur les autres. La lettre B désigne la partie inférieure du berceau ; les pierres couvrant cet espace sont les seules qui tendront à descendre, et leur poids ne serait pas assez considérable pour fatiguer la voûte à laquelle la descente viendrait aboutir : on peut d'ailleurs les arrêter comme nous l'avons dit plus haut.

Les rectangles, dont on a marqué les deux diagonales, indiquent la place des pierres simples (*fig.* 144).

344. On peut encore arranger les pierres comme dans la figure 145.

Cette disposition, plus symétrique, aurait en outre l'avantage d'isoler la clef; ce qui est fort important, parce que, dans la pratique, la clef est taillée en dernier, de manière à remplir exactement le vide qui reste après la pose des autres pierres, et à corriger les petites inégalités qui résultent de leur taille.

L'appareil que nous venons d'examiner n'exige pas plus de pierre que le précédent; de plus, comme on peut faire la partie *uz* aussi courte que l'on voudra, on pourra rendre le déchet presque nul.

Taille. Après avoir préparé la pierre suivant le contour du panneau de projection verticale (*fig.* 140, 141), on appliquera les panneaux de tête, donnés par la figure 138, sur les faces correspondantes *a*-1, 1-2; puis après avoir taillé les surfaces d'intrados, d'extrados et de joints, en suivant les contours des panneaux de tête, on évidera à droite et à gauche les parties nécessaires pour former les crossettes.

Les pierres (*fig.* 142 et 143) ne présenteront pas plus de difficultés.

III.

345. **Descente pénétrant dans un mur droit.** — Nous avons vu précédemment comment on peut appareiller les descentes ou berceaux rampants. Nous allons nous occuper de leur pénétration dans les murs ainsi que dans les voûtes.

346. Supposons d'abord le cas où il s'agirait d'une très-petite descente, comme par exemple un soupirail de cave, et que l'on puisse faire chaque voussoir d'une seule pierre.

Construction de l'épure. La pénétration dans le mur étant donnée (*fig.* 146, *Pl.* 23), ainsi que l'inclinaison de la descente, on construira la projection verticale (*fig.* 147), ce qui suffira pour tailler la pierre.

Pour cela, supposons que l'on veuille couper le second claveau : on préparera une pierre suivant le contour du panneau de projection verticale *abcd* et d'après l'épaisseur $2u$; puis, appliquant le panneau A (*fig.* 146) sur les deux faces parallèles *ab*, *cd*, toutes les coupes seront tracées.

347. Si les claveaux étaient trop longs pour qu'on pût les tailler d'un seul morceau, on ferait des coupes *vh* perpendiculaires à la direction de la descente et suivant les longueurs des pierres dont on pourrait disposer; puis on construirait la section droite rabattue sur l'épure (*fig.* 148).

Pour tailler une pierre (*fig.* 149), on la préparera sur le contour du panneau de projection verticale *vhon*; on appliquera ensuite le panneau B (*fig.* 146) sur la face ver-

ticale *on*, et le panneau B' (*fig.* 148) sur la face *vh* perpendiculaire à la descente, ce qui déterminera toutes les coupes.

IV.

348. **Descente biaise.** — On donne ce nom à la descente, lorsque les murs qui forment les pieds-droits de la voûte ne sont pas perpendiculaires au mur dans lequel se fait la pénétration. Ainsi, par exemple, étant données :

(*fig.* 150) la projection horizontale de l'espace que l'on doit couvrir par un berceau rampant ou descente;

(*fig.* 151) la pénétration dans l'une des faces verticales du mur;

Et (*fig.* 152) la projection sur un plan perpendiculaire à la longueur du mur.

On peut souvent éviter cette dernière figure, qui n'a en quelque sorte pour but que de faire connaître la différence de hauteur des points appartenant aux pénétration du berceau rampant dans les deux faces verticales du mur.

Construction de l'épure. Les divers points de la figure 151 étant projetés sur la trace horizontale du plan *p* (*fig.* 150), et ramenés à leur place en tournant autour de la verticale qui passe par le point C, il sera facile de construire la projection horizontale ; mais cela ne suffirait pas pour tailler la pierre. En effet, le berceau étant incliné par rapport aux deux plans sur lesquels ont été projetées les figures 150 et 152, il en résulte qu'aucune de ces deux projections ne fait connaître les véritables grandeurs des arêtes qui sont toutes ici projetées en raccourci.

On pourrait bien (*Géométrie descriptive*) déduire des deux figures 150 et 152 la véritable grandeur de chaque ligne, pour reporter ensuite ces longueurs sur la pierre, mais ce moyen serait trop long; il est beaucoup plus simple de construire une projection auxiliaire de la descente sur un plan vertical p', parallèle à sa direction.

Cette projection, rabattue sur l'épure (*fig.* 153), se construira facilement. Par tous les points de la figure 150 on mènera des perpendiculaires à la trace du plan p'; et, à partir de cette trace, on portera pour chaque point, sur la perpendiculaire qui lui correspond, la hauteur donnée par la figure 152; la projection (*fig.* 153) étant parallèle à la descente, donnera toutes les longueurs dans leurs véritables dimensions.

Pour avoir les largeurs, on coupera la descente par un plan p'' perpendiculaire à sa direction; et faisant tourner ce plan autour de sa trace horizontale, on obtiendra la figure 154, qui donne pour chaque pierre la section perpendiculaire aux arêtes.

On peut aussi construire (*fig.* 155) le développement de la douelle et la figure de chaque panneau de joint.

Taille de la pierre. Si la descente est assez courte pour que l'on puisse tailler chaque pièce d'un seul morceau; supposons, par exemple, qu'il s'agisse du voussoir A, on équarrira un parallélipipède ayant pour base le rectangle *abcd* (*fig.* 154), et pour longueur (*fig.* 153) la ligne *mv*, qui est la plus grande dimension de la pierre; puis, avec le panneau de tête A' (*fig.* 154), on taillera la pierre comme pour un berceau ordinaire; enfin, appliquant les panneaux de douelle et de joints (*fig.* 155), il sera facile de tracer toutes les coupes.

349. On peut encore opérer de la manière suivante : on préparera un parallélipipède d'après le parallélogramme *onzx* (*fig.* 153, 156), en lui donnant pour épaisseur la distance du point 2 au point *u* (*fig.* 151); puis, retranchant les parties *ni*, *tz*, sur les deux arêtes extérieures et les parties *os*, *xr* de la figure 153 sur les arêtes intérieures, on taillera les faces biaises *nitz*, *osrx*, qui doivent former les parements du mur, et sur lesquelles on appliquera le panneau vertical A (*fig.* 151), en faisant coïncider l'arête *ir* avec les arêtes *ir*, *ok*. Ce qui déterminera toutes les coupes.

350. Si la descente était trop longue pour que les claveaux pussent être exécutés d'une seule pierre, on ferait, à des distances convenables, des coupes perpendiculaires à la longueur, et l'on appliquerait sur ces faces les panneaux provenant de la figure 154.

Ainsi, pour tailler le voussoir représenté figure 157, on préparera une pierre d'après le contour de la projection verticale *fqygl* (*fig.* 153); puis, appliquant le panneau *fqyuh* sur la face extérieure, on taillera la face biaise *hugl* qui fait partie du parement du mur, et l'on tracera sur cette face le contour du panneau vertical B (*fig.* 151); enfin on appliquera le panneau B′ de la figure 154 sur la face *qy*. Ce qui déterminera toutes les coupes.

V.

351. **Descente dans une tour ronde.** — Les *données* sont : 1° (*fig.* 158) la projection horizontale des murs ou pieds-droits de la descente, ainsi que celle du mur circulaire

dans lequel se fait la pénétration; 2° (*fig.* 160) l'inclinaison projetée sur un plan vertical parallèle à la direction de la descente; 3° enfin (*fig.* 159) la section de la descente par un plan vertical.

Construction de l'épure. Les différents points de la figure 159 étant projetés sur la trace horizontale du plan *p*, et ramenés à leur place en tournant autour de la verticale du point C, on construira les projections horizontales des différentes arêtes de la descente. Par les points où ces lignes rencontrent l'arc *oi*, qui est la trace du cylindre intérieur de la tour ronde, on élèvera des verticales jusqu'à la rencontre des projections verticales des arêtes de la descente, ce qui fera connaître la projection verticale de la pénétration.

On fera bien, cependant, de ne pas prolonger jusqu'à la surface intérieure de la tour, les plans inclinés passant par les arêtes *ab*, *ed* (*fig.* 159), parce que l'inclinaison des coupes qui en résulteraient ferait un effet désagréable.

Pour éviter cela, on ne fera descendre les plans *ab*, *ed*, *cu*, que jusqu'aux points où les arêtes *aa'* *ee'*, rencontrent le parement intérieur du mur; et par ces points on construira les petites faces horizontales *e'd'i*, *a'b'i* (*fig.* 158).

La figure 161 est la section droite de la descente et la figure 162 contient le développement de la douelle et les panneaux de joints. La construction de ces deux figures ne présente aucune difficulté.

Taille de la pierre. On préparera un parallélipipède rectangle *mnvz* ayant l'épaisseur du voussoir, et l'on tracera sur les deux faces opposées, l'arc du panneau A' (*fig.* 161); puis, après avoir taillé la surface cylindrique formant l'intrados de la descente et les deux plans de joints, on appliquera les panneaux de douelle et de joints (*fig.* 162); en-

fin, on fera la face verticale A, le plan incliné passant par la ligne *ed*, puis le plan horizontal, sur lequel on tracera le panneau *e'd'i* (*fig.* 158); l'arc *e'i* servira de directrice à la surface cylindrique du mur rond, que l'on engendrera en faisant mouvoir une règle perpendiculaire au plan horizontal *e'd'i*.

On pourra aussi tailler la pierre sur le contour de sa projection verticale, appliquer le petit panneau horizontal *e'd'i*, dont l'arc *ei* servira de directrice à la surface cylindrique du mur rond. Cette surface étant taillée, on y appliquera le panneau de tête, qu'on aura eu le soin de développer en opérant comme nous l'avons fait pour les portes (*Pl.* 14). Le contour de ce panneau avec celui de la face verticale A (*fig.* 159) détermineront toutes les coupes. Il ne faut pas oublier d'avoir égard à l'inclinaison du berceau.

Si le voussoir ne pouvait pas se faire d'un seul morceau, on ferait une section perpendiculaire à la descente.

VI.

352. **Descente pénétrant dans un mur droit.** — La nécessité de conserver horizontales les assises d'un mur dans lequel vient aboutir un berceau en descente, offre quelquefois des difficultés que nous allons tâcher de résoudre.

Données. La figure 163, *Pl.* 24, est la projection horizontale de la moitié de l'espace qu'il s'agit de couvrir par une descente. La figure 164 est la projection sur un plan parallèle à la direction du berceau, et la figure 165 est la section par un plan vertical.

353. On suppose presque toujours cette figure donnée, parce que l'on est souvent forcé de faire aboutir les berceaux biais ou rampants à des portes dont la forme est déterminée par les dispositions générales du monument.

Construction de l'épure. La courbe provenant de la pénétration du berceau dans le plan vertical du mur, sera un demi-cercle égal à celui qui forme le cintre de la figure 165; mais si l'on adoptait le même appareil pour la pénétration dans le mur, il pourrait arriver, dans le cas d'une grande inclinaison de la descente, que les pierres de la deuxième assise n'eussent pas assez d'épaisseur du côté qui correspond à l'intérieur du monument. En effet, les parties saillantes de la première pierre devant s'emboîter dans un creux de même forme pratiqué au-dessous de la seconde, le refouillement que l'on devra faire dans ce cas diminuera nécessairement l'épaisseur de cette pierre, surtout si l'on tient à conserver horizontaux les lits supérieurs des assises du mur.

354. Ces considérations engagent à donner aux deux premières pierres (*fig.* 166) une plus grande épaisseur que dans les appareils précédents.

Il ne faut cependant pas regarder cette disposition comme une règle générale, mais comme un des moyens que l'on peut employer pour éviter un inconvénient qui ne sera pas aussi sensible dans une descente moins inclinée.

L'arête rampante passant par le point a'' (*fig.* 165) rencontrera le plan horizontal de la première pierre du mur en un point a, a' (*fig.* 164, 163), ce qui déterminera la droite ab, $a'b'$, suivant laquelle ce lit est coupé par le premier plan de joint de la descente.

Des constructions analogues feront connaître les droites (*cd*, *c'd'*) (*eh*, *e'h'*) provenant des intersections des deuxième et troisième joints de la descente avec les plans horizontaux du mur. On peut aussi, pour vérification, construire le point *uu'* suivant lequel le plan horizontal *he* rencontre la troisième arête de la descente.

La figure 167 est la section de la descente par le plan *p* perpendiculaire à sa direction; on suppose que cette figure est rabattue sur le plan de projection, en tournant autour de l'horizontale projetante du point *c*.

Enfin, la figure 168 contient les panneaux de joints dans leur véritable grandeur. Les longueurs de ces panneaux sont déduites de la figure 164, et les largeurs sont données par la figure 167.

Taille de la pierre. On préparera la première pierre suivant le contour de projection verticale *mnozba* (*fig.* 164), puis on appliquera le panneau A de la figure 166 sur la face verticale *bz*, et le panneau A' de la figure 167 sur la face inclinée *mn*. Les courbes *o*1 de ces deux panneaux serviront de directrices à la douelle, et les deux droites 1*b'''*, 1*b''''* avec l'arête d'intrados détermineront le plan de joint, sur lequel on pourra, pour plus de précision, appliquer le panneau de joint (*fig.* 168).

On peut augmenter l'étendue de la surface horizontale destinée à recevoir la pierre supérieure, en prolongeant cette surface jusqu'au plan de joint (*fig.* 169).

On peut aussi (*fig.* 170) faire le petit plan *abl* perpendiculaire à la face du mur. Il est certain qu'une coupe de ce genre, si elle est bien exécutée, retiendra la pierre supérieure et détruira une partie de l'action par laquelle elle tend à descendre en glissant sur le plan de joint de la descente; mais,

nous l'avons dit plus haut (342), certaines coupes composées, quoique plus conformes en théorie aux conditions de l'équilibre, ne remplacent pas toujours avec avantage l'exactitude d'exécution et la précision de la pose provenant d'une coupe plus simple. Il ne faut cependant pas négliger d'étudier avec soin toutes ces différentes combinaisons auxquelles on est quelquefois forcé d'avoir recours dans des circonstances extraordinaires.

355. Il est superflu d'ajouter encore que l'on ne doit pas adopter comme résultat de méthodes générales, des coupes dont les formes doivent être nécessairement soumises aux données particulières de la question, et qui dépendent, non-seulement des différentes hauteurs d'assises que l'on veut raccorder, mais encore de l'inclinaison plus ou moins grande des berceaux.

On devra donc considérer l'exemple précédent comme une étude, et l'on fera bien de s'exercer à déterminer l'appareil pour des descentes de grandeur et d'inclinaison différentes, en se créant pour les vaincre des difficultés que dans la pratique on doit au contraire chercher à éviter. Ainsi, par exemple, dans le cas des données précédentes, toutes les difficultés disparaîtront en opérant comme on le voit figure 174.

356. On terminera la descente par deux petits cylindres horizontaux A, B. La figure 175 est la section droite que l'on suppose rabattue sur le plan vertical en tournant autour d'une droite horizontale passant par le point *o*.

La *taille* des pierres, 176 et 177, ne présentera aucune difficulté.

VII.

357. **Descente pénétrant dans un berceau horizontal.** — Soient (*fig.* 178, *Pl.* **25**), la section verticale servant de directrice à la descente; (*fig.* 179) la section droite du berceau horizontal auquel elle vient aboutir; et (*fig.* 180) la projection horizontale des murs ou pieds-droits qui doivent supporter ces deux voûtes.

Construction de l'épure. On tracera (*fig.* 181) les projections verticales des arêtes de douelle, et (*fig.* 180) les projections horizontales de ces mêmes arêtes. Par les points où les projections verticales des arêtes de douelle rencontrent l'arc *ad* (*fig.* 179), on abaissera des perpendiculaires dont les intersections avec les projections horizontales de ces mêmes arêtes, feront connaître la projection horizontale de la courbe à double courbure formant l'arêtier ou pénétration des deux voûtes.

L'arête 1, 1 de la descente ne rencontrant pas l'arête *b* du berceau horizontal, on construira l'arc d'ellipse 1*b*, 1*b'*, provenant de l'intersection du grand berceau par le plan de joint dont la trace est 1*b''*, sur le plan vertical rabattu (*fig.* 178).

La droite *bb* (*fig.* 181), parallèle à la descente, rencontre le plan vertical (*fig.* 178) en un point *b''* qui projeté en *b'''* et ramené en tournant autour de la verticale du point *c*, fera connaître le point *b'*. On construira par le même moyen autant de points que l'on voudra de l'arc 1*b'*.

Le plan de joint *bu* du berceau horizontal, contenant l'axe de ce berceau, sera perpendiculaire au plan vertical

de projection (*fig.* 179); et le point mm', suivant lequel ce plan prolongé coupe l'arête de douelle 1, 1, appartient à l'intersection des joints des deux berceaux. On ne conservera de cette ligne que la partie bu, $b'u'$, et l'on construira la droite iu' provenant de l'intersection du joint du berceau horizontal avec le lit supérieur de la première pierre. Le point u' peut aussi se déterminer en construisant (*fig.* 181) la droite uu qui perce le plan vertical p en un point u'' (*fig.* 178), d'où l'on déduit u''', et enfin u'.

L'arête rampante qui contient le point z'' (*fig.* 178) rencontrera le plan supérieur de la première pierre du berceau horizontal en un point zz'; d'où l'on déduira la droite uz, $u'z'$ provenant de l'intersection de ce même plan par le joint du berceau rampant.

Le contour du premier panneau de joint de la descente sera donc composé des lignes suivantes (*fig.* 182, 187).

1° L'arête de douelle 1, 1 appartenant au berceau rampant;

2° L'arc d'ellipse 1b provenant de l'intersection du berceau horizontal par le plan de joint de la descente;

3° La droite bu, intersection des plans de joint des deux berceaux;

4° La droite uz, intersection du plan supérieur de la première pierre par le joint de la descente;

5° La droite zz, arête rampante qui contient le point z'', (*fig.* 178);

6° Enfin (*fig.* 182), le petit côté $z1$, intersection du joint de la descente et du plan p'' de la section droite rabattue (*fig.* 186).

358. On conçoit que les dispositions des lignes précédentes ne sont pas les mêmes pour toutes les descentes. La figure 183

fait voir les diverses directions que prendrait l'intersection des plans de joint suivant la plus ou moins grande inclinaison de l'arête de douelle 1, 1. Ces deux lignes pourraient même quelquefois être parallèles entre elles. La droite $bu, b'u'$ est l'intersection des deux joints dans le cas où les deux berceaux seraient horizontaux.

Il peut encore arriver que le plan incliné qui contient la droite $z''x''$ (*fig.* 178) passe au-dessus de l'arête du point u. Alors on fera, par l'arête horizontale uu (*fig.* 184, 185), la petite coupe verticale uzx.

359. Nous allons actuellement passer à la projection du second panneau de joint.

Ici, comme précédemment, l'arête de douelle de la descente ne rencontrant point l'arête horizontale du point c, il faudra construire l'arc d'ellipse $2c, 2c'$ provenant de l'intersection du berceau horizontal par le second joint de la descente. Cette construction se fera comme ci-dessus, c'est-à-dire que l'on construira la droite cc parallèle à la descente. Cette ligne perce le plan vertical p en un point c'' (*fig.* 178) qui, projeté en c''' et ramené, fera connaître c', et par le même moyen on aura autant de points de la courbe que l'on voudra. Un point intermédiaire suffit ordinairement, à cause du peu de distance des points $2, c$. On remarquera que les projections horizontales des ellipses $1b'$, $2c'$, $3d'$, doivent toutes passer par le point a', suivant lequel la droite $aa, a'a'$ perce le berceau horizontal.

Cela n'aurait pas lieu si l'arc vertical servant de directrice à la descente n'était pas circulaire; les plans de joints seraient alors déterminés par des normales à cette courbe, et, dans ce cas, ils ne contiendraient pas la droite passant par le centre.

La droite *cv*, *c'v'*, intersection des plans de joints, se déterminera comme précédemment, soit en menant la droite *vv* qui perce le plan vertical *p* en *v''*, d'où l'on déduira *v'''*, et par suite *v'*; soit en construisant le point *nn'*, suivant lequel le plan de joint du berceau horizontal coupe l'arête de douelle 2, 2.

L'arc d'ellipse *vs*,*v's'*, provenant de l'intersection du cylindre d'extrados du berceau horizontal par le plan de joint 2*v''* (*fig.* 178), se construira de la même manière que l'arc 2*c*, 2*c'*.

On déterminera entre *s* et *v* autant de points intermédiaires que l'on jugera à propos.

Enfin l'arête inclinée *rr* appartenant à l'extrados de la descente perce le plan supérieur de la deuxième pierre en un point *rr'*, que l'on joindra avec le point *ss'* par la petite droite *sr*, *s'r'*, ce qui complétera la projection du second panneau de joint, dont le contour se compose des lignes suivantes (*fig.* 181, 187) :

1° L'arête de douelle 2,2 appartenant au berceau rampant ;

2° L'arc d'ellipse 2*c*, provenant de l'intersection du berceau horizontal par le plan de joint de la descente ;

3° La droite *cv*, intersection des plans de joint des deux berceaux ;

4° L'arc d'ellipse *vs*, intersection de l'extrados du berceau horizontal par le plan de joint de la descente ;

5° La petite droite *sr*, suivant laquelle le joint de la descente coupe le plan horizontal *sl* (*fig.* 179).

6° L'arête *r*, *r*, appartenant à l'extrados de la descente ;

7° Enfin (*fig.* 288), la petite droite 2*r*, intersection du plan de joint de la descente et du plan de la section droite.

Pour compléter la projection horizontale, on construira encore :

1° La droite $s's'e'$ qui représente la naissance de l'extrados du berceau horizontal ;

2° La droite $k'o'$ intersection du plan horizontal ls (*fig.* 181) par le plan incliné $k''o''$ (*fig.* 178) ;

3° L'arc d'ellipse $o'e'$, provenant de l'intersection de l'extrados de la descente par le plan horizontal ls : on prendra pour construire cette courbe un point ou deux entre o et r, et l'on conduira par ces points des droites parallèles à la descente jusqu'à la rencontre du plan ls (*fig.* 181) ;

4° Les projections verticales d'autant de droites que l'on voudra, situées dans l'extrados de la descente, rencontreront l'arc sh (*fig.* 181) en des points dont les projections horizontales se construiront facilement, ce qui déterminera la courbe à double courbure $e't't'$, provenant de l'intersection des deux extrados ;

5° Enfin, les projections des deux panneaux de joints de la clef se construiront par les mêmes moyens, et compléteront la projection horizontale.

La figure 186 est la section du berceau rampant, par le plan p'', perpendiculaire à sa direction. On suppose que cette figure a été rabattue sur le plan horizontal.

La figure 187 contient le développement de la douelle et le rabattement des panneaux de joints.

Les largeurs de ces panneaux sont données par la figure 186, et les longueurs se déduisent de la figure 181.

Nous nous sommes étendus longuement sur tous les détails de la construction de cette épure, qui, bien étudiée, familiarisera l'esprit avec les difficultés de raccordement d'assises que nous rencontrerons par la suite.

On fera bien, avant de passer outre, de varier de plusieurs manières les données de la question.

Taille de la pierre. Après avoir préparé une pierre suivant le contour du panneau vertical *afbuzeyg* (*fig.* 181), on appliquera le panneau de tête (*fig.* 186) sur les deux plans parallèles *ye*, *af;* puis après avoir taillé la surface cylindrique de la douelle et le plan de joint, on appliquera sur ces surfaces les panneaux de douelle et de joint correspondants (*fig.* 187). Enfin, le panneau de tête du berceau horizontal étant appliqué sur la face perpendiculaire à ce berceau, toutes les coupes seront tracées.

Pour la seconde pierre (*fig.* 188), on opérera d'une manière analogue, ou bien, encore, on pourra commencer par tailler, suivant la longueur que l'on voudra donner à la pierre, un parallélipipède rectangle, dont la base sera le rectangle circonscrit à la projection de la pierre sur le plan *p''* (*fig.* 186). On appliquera le panneau de tête sur les deux faces opposées du parallélipipède, et l'on taillera la douelle de la descente et le plan du joint supérieur sur lesquels on appliquera les panneaux correspondants. Les courbes de ces panneaux, avec l'arc *bc* du panneau de tête du berceau horizontal, serviront de directrices à la douelle de ce berceau.

En opérant avec soin, on pourra éviter l'emploi des panneaux de douelle et de joint, et par conséquent la construction de la figure 187. Pour cela on se contentera (*fig.* 188) d'appliquer les panneaux de tête de la descente et du berceau horizontal, après quoi l'on fera des coupes perpendiculaires aux plans de ces panneaux, en suivant leur contour.

La figure 189 fait voir comment on agit dans la pratique. Cette disposition, qui réunit l'élégance à la solidité, a de plus l'avantage d'éviter les angles aigus, les refouillements, ainsi

que les irrégularités qui résultent de la rencontre des assises inclinées avec celles qui sont horizontales.

VIII.

360. **Descente biaise pénétrant dans un berceau horizontal.** — Une partie de cette épure n'est que la répétition de celle qui précède, et n'en diffère que par l'angle plus ou moins grand, que les deux voûtes font entre elles, de sorte que la plus grande partie des angles qui étaient droits dans l'exemple précédent sont ici aigus ou obtus, suivant qu'ils sont placés à gauche ou à droite de la descente.

Les *données* sont : 1° (*fig.* 190), *Pl.* **26**, la projection horizontale des murs ou pieds-droits des deux voûtes ;

2° (*fig.* 191) l'arc vertical servant de directrice à la descente.

3° Enfin (*fig.* 192), la projection sur un plan perpendiculaire au berceau horizontal.

Épure. La projection horizontale de la pénétration et de toutes les arêtes d'intrados et d'extrados se construira comme pour une descente droite ; mais quand il s'agira de reporter toutes ces lignes sur la pierre, il est évident que les véritables dimensions des diverses parties du berceau rampant ne seront données par aucune des figures 190, 191 et 192, puisque les plans sur lesquels ces figures ont été projetées sont obliques à la direction des arêtes de la descente.

Il faudra donc, comme nous l'avons déjà fait (348), construire une projection auxiliaire sur un plan parallèle à la descente.

Pour éviter la confusion, on a fait ici deux projections auxiliaires, l'une (*fig.* 193) pour les pierres de gauche, et l'autre (*fig.* 194) pour celles de droite. La clef a été projetée entièrement des deux côtés.

La portion de voûte, projetée (*fig.* 193), a été coupée par un plan p, perpendiculaire à la direction du berceau rampant; ce plan, avancé parallèlement à lui-même, et rabattu sur l'épure, a donné la moitié de la figure 195 qui représente la section droite de la descente. L'autre moitié de la même figure provient de la section de l'autre portion de la voûte par le plan p'. On doit avancer ce dernier plan de manière que les points de la clef viennent coïncider dans le rabattement avec les mêmes points déjà obtenus par le rabattement du plan p.

Il est évident au surplus que l'on aurait pu, comme dans tous les exemples qui précèdent, couper les deux parties de la descente par un même plan perpendiculaire à sa direction; la place où l'on doit faire la section droite étant tout à fait arbitraire, et ne dépendant en général que de la disposition de l'épure.

361. Si l'on veut déterminer les dimensions des blocs que l'on doit employer, il faudra projeter complétement sur les plans p et p' les pierres du berceau horizontal, et construire ces projections dans le rabattement (*fig.* 195). Ainsi, par exemple, la seconde pierre à droite de la descente sera tout entière comprise dans un parallélipipède ayant pour base le rectangle *eytg*, et une longueur que l'on déterminera sur la figure 194.

La figure 196 est le développement de la douelle et des panneaux de joint de la portion de descente qui est projetée (*fig.* 193). Cette projection parallèle aux arêtes, fait connaître leurs longueurs; et les largeurs des panneaux de douelle et de joints

sont déduites de la figure 195. La figure 197 se construira de la même manière, et contient les panneaux de douelle et de joints de l'autre moitié de la voûte.

362. Nous terminerons cette épure par la construction de l'angle que font entre elles les directions des deux berceaux. Pour cela :

En un point quelconque, *o*, *o'* (*fig.* 192, 190), on construira d'abord la droite *uz*, parallèle au berceau horizontal, et qui, par cette raison, se projettera par un seul point *o* sur le plan vertical de la figure 192 ; ensuite la droite *om*, *o'm*, parallèle au berceau rampant ; il est évident que l'angle formé par ces deux droites sera l'angle que les deux berceaux font entre eux. Pour avoir cet angle dans sa véritable grandeur, on le fera tourner autour du côté horizontal *uz*, jusqu'à ce que l'autre côté *om*, *o'm'* soit venu se placer dans la position horizontale *on*, *o'n'*. Enfin, on construira les beuveaux *vo'u*, *vo'z*, dont nous verrons l'usage tout à l'heure.

Taille de la pierre. Supposons que l'on veuille tailler la deuxième pierre à droite de la descente, on prendra un bloc capable de la contenir.

On dressera d'abord (*fig.* 198) le plan supérieur *eob* qui doit être parallèle aux arêtes des deux berceaux, et qui est représenté par *ab* sur la figure 192 et par *ey* (*fig.* 195), puis on fera, perpendiculairement à ce plan, les deux faces *geo*, *dbo*, faisant entre elles un angle *voz* que l'on tracera au moyen du beuveau que nous avons construit précédemment. Cela étant fait, on taillera le plan *eq* perpendiculaire sur l'arête *eo*, puis le plan *bc* perpendiculaire sur l'arête *ob*. Enfin, on appliquera sur ces plans les deux panneaux de tête A et B, en ayant soin que ces panneaux soient placés dans les rectangles *ebcd*, *ehqg*, comme ils le sont sur les figures 192 et 195.

Avant d'abattre l'arête de la pierre pour faire l'angle obtus *voz*, on pourrait, pour plus de précision, dresser le plan parallèle à la surface *ehgq*, puis ayant tracé le panneau A sur ces deux plans opposés, on taillera la douelle de la descente, et le plan du joint supérieur, sur lesquels on appliquera les panneaux de douelle et de joint donnés par la figure 197, de sorte que les courbes de ces panneaux avec celles du panneau B, serviront de directrices aux surfaces d'intrados et d'extrados du berceau horizontal.

IX.

363. **Autre solution.** — En opérant avec soin on pourra se contenter des panneaux de tête A et B ; dans ce cas, on évitera une grande partie du travail précédent ; en effet, la construction des figures 196 et 197 deviendra inutile. Nous remarquerons de plus que la projection horizontale de la pénétration des deux berceaux (*fig.* 190) n'a servi que pour construire les deux projections auxiliaires (*fig.* 193, 194) desquels nous avons déduit la section droite (*fig.* 195). Or, si nous pouvions obtenir cette dernière figure directement, nous aurions les panneaux de tête de la descente qui, avec ceux du berceau horizontal (*fig.* 192), suffiraient pour tracer toutes les coupes.

Supposons donc (*Pl.* **27**) les mêmes données que dans l'épure précédente, savoir :

(*fig.* 199) la projection horizontale des murs ou pieds-droits ;

(*fig.* 200) l'arc vertical servant de directrice à la descente ;

(*fig.* 201) enfin la projection sur un plan perpendiculaire à la direction du berceau horizontal.

Construisons la droite *tr*, *s'r'*, parallèle à la descente ; cette ligne rabattue sur l'épure en *t''r'* sera coupée par le plan de la section droite *lp*, en un point *k* qui, ramené en *k'* sur le plan horizontal de projection, détermine la droite *lk'*, intersection du plan de naissance de la descente et du plan de la section droite.

Or, si par chacune des arêtes de la descente on conçoit un plan parallèle au plan de naissance, et par conséquent perpendiculaire au plan vertical de projection, tous ces plans couperont le plan de la section droite, suivant des lignes parallèles entre elles, dont les projections verticales se confondront avec celles des arêtes du berceau rampant ; ces lignes, prolongées, rencontreront la droite *iw* que l'on peut toujours supposer dans le plan de la section droite, en des points que l'on ramènera sur *iw'*, et par lesquels on construira (*fig.* 202) des parallèles à la droite *lk'*. Enfin, les intersections de ces parallèles avec les projections horizontales des arêtes de la descente, feront connaître tous les points de la section droite rabattue sur l'épure dans sa véritable grandeur.

Les rectangles circonscrits aux divers panneaux de tête font connaître la position de chacun de ces panneaux, ainsi que l'épaisseur des pierres que l'on devra employer. Les autres dimensions dépendront du plus ou moins de longueur que l'on voudra donner aux parties de ces pierres qui appartiennent aux deux berceaux.

Le rectangle circonscrit au panneau de tête de la première pierre a été déterminé pour le cas où la section de la partie rampante serait faite par le point *e* ; mais si le lit horizontal devait s'étendre jusqu'au point *v*, il faudrait, comme on le voit sur l'épure, augmenter en conséquence l'étendue du rectangle dans lequel le panneau doit être inscrit.

CHAPITRE VI.

Questions diverses.

I.

365. **Biais passé.** — Nous avons vu (298) la manière d'appareiller des passages obliques; mais dans une voûte, l'action provenant de la pesanteur de chaque pierre, se décompose en deux autres perpendiculaires à ses faces; d'où il résulte, lorsque l'on prend pour arêtes de joints les génératrices du cylindre, que la poussée perpendiculaire à l'axe n'agit pas dans le sens de la longueur du mur, et qu'elle tend, par son action oblique, à renverser les angles aigus, c'est ce que l'on nomme *poussée au vide.*

On évitera cet inconvénient en faisant passer les plans de joints par une droite *ac* (*fig.* 211) perpendiculaire aux faces du mur. Il est évident que par ce moyen la poussée se fera dans le sens de la plus grande résistance des pieds-droits; il y aura de plus cet avantage que les plans de joints seront perpendiculaires aux faces du mur, ce qui n'avait pas lieu dans l'exemple cité plus haut. Mais d'un autre côté, les arêtes d'intrados seront des arcs d'ellipses; ensuite les joints ne seront

perpendiculaires à la douelle que vers le centre de la voûte; et à partir de ce point, les angles deviendront d'autant plus aigus que le passage sera plus long et plus incliné par rapport aux faces du mur.

On ne pourrait remédier à ce défaut qu'en remplaçant les plans de joints par des surfaces courbes. Nous verrons, plus tard, comment il faudrait opérer dans ce cas.

Ceci confirme ce que nous avions déjà dit, que dans l'appareil d'une voûte on ne peut souvent éviter une irrégularité que par une autre, et qu'il faut s'exercer à choisir dans chaque cas le parti qui offre le moins d'inconvénients.

Construction de l'épure. Les arêtes d'intrados se projetteront sur le plan vertical par des lignes droites; mais leurs projections horizontales seront des arcs d'ellipse. On construira ces courbes en déterminant les points suivant lesquels les plans de joints coupent les génératrices du cylindre; ou bien, comme nous l'avons fait ici pour plus d'exactitude, en traçant sur le cylindre plusieurs cercles parallèles entre eux et au plan vertical, et projetant sur le plan horizontal les points suivant lesquels ces cercles sont coupés par les plans de joints.

Les panneaux de joints, tournant autour de la droite *ac*, ont été ramenés dans le plan vertical *p*, puis rabattus sur l'épure (*fig.* 213).

Taille de la pierre. On préparera un voussoir sur le panneau de projection verticale A (*fig.* 212). Puis, quand on aura taillé les deux têtes et les plans de joints, on y appliquera les panneaux correspondants.

Les chiffres placés sur les contours des panneaux in-

diquent les points par lesquels on doit faire passer la règle pour engendrer la surface cylindrique de la douelle.

II.

366. La figure 215 fait voir ce qu'il faudrait faire pour éviter les angles aigus que la douelle fait avec les faces du mur. Ce moyen, en augmentant l'inclinaison du cylindre, rendrait plus aigus les angles que les joints font avec la douelle.

CHAPITRE VII.

Trompes.

I.

367. **Définitions.** — Les trompes ont pour but de supporter quelques parties d'un monument dont on ne veut pas élargir la base.

Ainsi, par exemple, une tourelle que l'on voudrait construire en saillie sur la face d'un mur droit ou à l'angle formé par deux murs; une maison dont on voudrait couper le coin vers la base, en conservant la forme angulaire pour les étages supérieurs; un quai dont il faudrait augmenter la largeur sans rétrécir le lit de la rivière, etc.

Nous allons nous occuper ici des trompes cylindriques.

II.

368. **Trompe sur un pan coupé.** — Supposons que, pour faciliter le passage des voitures au détour d'une rue,

on coupe la base d'un bâtiment suivant la droite $a'c'$ (*fig.* 216, *Pl.* 29), tandis que les parties supérieures conserveraient la forme angulaire $a'e'c'$.

On décrira (*fig.* 217) un arc $a''e''$, avec un rayon plus ou moins grand, suivant que l'on voudra faire la trompe plus ou moins surhaussée. Cet arc, étant ramené dans le plan vertical $a'e'$, en tournant autour de la verticale qui contient le point mm', servira de directrice à une surface cylindrique parallèle à la droite $a'c'$. Cette surface rencontre le plan vertical $c'e'$, suivant l'arc d'ellipse $c''e''$, rabattu (*fig.* 218) en tournant autour de la verticale qui contient le point nn'.

On fera passer les plans de joints par la droite oo', dont la projection horizontale joindrait le point e' avec le milieu de $a'c'$.

Or, en prenant, comme nous l'avons fait ici, un plan vertical de projection (*fig.* 219), perpendiculaire à la droite $o'o$, les arêtes de joints se projetteront sur ce plan par des lignes droites concourant au point o.

Pour construire les projections horizontales de ces courbes qui sont des arcs d'ellipse, on abaissera des perpendiculaires par les points où elles rencontrent les génératrices de la surface cylindrique de la trompe.

Pour éviter les angles trop aigus qui résulteraient de la réunion des voussoirs autour du point o, on ne les prolongera pas jusqu'à ce point, et l'on fera cette partie d'un seul morceau auquel on donne le nom de *trompillon*.

L'arête de cette pierre est une courbe à double courbure, provenant de la pénétration de la surface cylindrique de la trompe par le petit cylindre horizontal, formant le joint du trompillon; la projection verticale de cette courbe sera la demi-circonférence rsv, et sa projection horizontale $r's'v'$

s'obtiendra en construisant pour chacun de ses points une génératrice de la surface cylindrique de la trompe, et déterminant l'intersection de cette génératrice par la perpendiculaire abaissée de la projection verticale du point.

369. Quelquefois, pour éviter les angles aigus, on croit devoir remplacer la surface cylindrique formant le joint du trompillon par une surface normale à celle de la trompe; mais cette précaution est inutile, parce que la grandeur du trompillon étant toujours peu considérable, la rencontre de la surface cylindrique du joint avec celle de la trompe se fait suivant des angles qui diffèrent très-peu de l'angle droit, tandis que si l'on emploie pour joint du trompillon, une surface normale, l'inclinaison de cette surface, surtout vers le point *s*, tendrait à faire glisser les pierres en avant, et à les écarter du mur auquel la trompe est adossée.

Or c'est précisément ce qu'il faut tâcher d'éviter dans ces sortes de constructions; on doit, au contraire, employer tous les moyens capables de retenir les pierres et de les rattacher au corps principal du bâtiment en éloignant leur centre de gravité du lieu où la construction est privée de soutiens.

Il faut tâcher que la clef et les pierres adjacentes aient le plus de longueur possible engagée dans la masse du monument.

La figure 220 représente les panneaux de joints rabattus sur le plan horizontal. On suppose qu'avant ce rabattement, on avait avancé le plan de chacun de ces panneaux jusqu'au point *m*.

La figure 221 est le développement de la surface cylindrique, formant le joint du trompillon.

Taille de la pierre. — Supposons, par exemple, que l'on veuille tailler la deuxième pierre à droite de la trompe; on

préparera un voussoir sur le panneau de projection verticale, comme s'il s'agissait d'une porte droite; on appliquera ensuite, sur la face horizontale *tu*, le panneau correspondant *vizt'u'*, donné par la figure 216, et après avoir taillé la face verticale *tu* 21, formant le parement du mur, on y placera le panneau A' (*fig.* 218); enfin les deux panneaux de joints (*fig.* 220) et le panneau B du trompillon (*fig.* 221) compléteront le tracé de toutes les coupes.

Il ne faudra pas oublier de marquer sur les courbes de ces panneaux les points par lesquels on doit faire passer la règle pour engendrer la surface cylindrique de la douelle.

370. Il résulte de la disposition de l'appareil précédent que les plans de joints font des angles aigus avec les faces des deux murs *a'e'*, *c'e'*. On pourra remédier en partie à ce défaut en faisant (*fig.* 222) les petites coupes 1*bg*, *klh*, perpendiculaires aux faces du mur; mais ces sortes de coupes brisant l'arête de joint d'une manière désagréable, on ne doit y avoir recours que dans le cas où les angles seraient trop aigus.

III.

371. **Trompe cylindrique.** — L'arc *a'e'* (*fig.* 223) forme le contour de la projection horizontale d'une tourelle, engagée en partie dans le mur principal d'un monument. La partie inférieure de cette tourelle est coupée comme on le voit par le profil (*fig.* 225), et terminée par une trompe cylindrique, parallèle à la surface du mur auquel la trompe est adossée. On a pris ici pour directrice de la surface cylin-

drique de la trompe, une courbe à double courbure, ayant pour projection horizontale l'arc de cercle *a'e'* (*fig.* 223), et pour projection verticale (*fig.* 224) la demi-circonférence *aec*. Cette courbe peut être considérée comme provenant de l'intersection du cylindre formant la surface extérieure de la tourelle et d'un cylindre *aec*, perpendiculaire au plan vertical de projection.

On pourrait se donner pour condition que le profil *a''e''* (*fig.* 225) soit un arc de cercle ou une ligne droite; alors, il faudrait commencer par tracer ce profil et en déduire la courbe *aec* qui, alors, ne serait plus un arc de cercle, et produirait, vue de face, un effet moins agréable à l'œil. On se déterminera, au surplus, pour l'un ou l'autre système, suivant que la trompe sera située de manière à être vue de face ou de profil.

Les plans de joints passant par l'axe du trompillon seront perpendiculaires au plan vertical (*fig.* 224); d'où il suit que les arêtes de joints auront pour projections verticales des droites concourant au point *o*, et pour projections horizontales des courbes qui se construiront comme dans l'exemple précédent.

Les panneaux de joints sont rabattus sur le plan horizontal (*fig.* 226), et la figure 227 est le développement de la moitié de la surface cylindrique du trompillon.

La figure 228 est le développement de la surface cylindrique de la tourelle. Pour construire ce développement, on portera sur une droite horizontale, et à la suite les unes des autres, les diverses parties de l'arc *a'e'*; puis on construira les ordonnées 1-1, 2-2, *e'-e*, dont les longueurs se déduiront de la figure 224.

Taille de la pierre. On préparera un voussoir sur le panneau vertical *ts*3422 (*fig.* 224). La courbe *a'*2 (*fig.* 223)

étant tracée sur le plan horizontal *tu* servira de directrice à une règle que l'on fera mouvoir perpendiculairement au plan horizontal *tu*. Par ce moyen, on taillera la surface cylindrique de la tourelle sur laquelle on enveloppera le panneau flexible A′, au moyen duquel on tracera les courbes 12, 2*u*. On détruira ensuite la petite portion *u*22 que l'on n'avait conservée que pour faciliter la taille de la surface cylindrique de la tourelle, et l'on appliquera les panneaux de joints (*fig.* 226), qui, avec le panneau B du trompillon, compléteront le tracé de toutes les coupes.

Il est bien entendu que l'on marquera, sur les contours de ces panneaux, les points par lesquels on doit faire passer la règle pour engendrer la surface cylindrique de la trompe.

372. La figure 229 est la combinaison de plusieurs trompes destinées à soutenir une construction en saillie sur toute la longueur d'un mur droit. Les constructions de ce genre prennent le nom d'*encorbellement*; la figure 230 est la coupe par un plan perpendiculaire au mur.

Cet exemple ne présente pas assez de difficulté pour nous arrêter plus longtemps.

CHAPITRE VIII.

Résumé.

I.

373. **Considérations générales.** — On peut reconnaître, par ce qui précède, qu'un problème de construction en pierre se compose, en général, des opérations suivantes :

1° *Choix des plans de projection ;*

2° *Construction des données et de l'appareil ;*

3° *Détermination de toutes les lignes de pénétration des voûtes et de leurs surfaces de joints ;*

4° *Rabattement et développement des différentes faces dont on veut avoir la grandeur ;*

5° *Tracé et taille de la pierre.*

Nous allons considérer chacune de ces opérations d'une manière générale.

II.

374. **Plan de projection.** — On est déterminé dans le choix des plans de projection par la nature des opérations

que l'on doit faire pour la construction de l'épure et l'exécution de la pierre. Ces opérations sont de deux espèces.

1° La première partie du travail consiste à déterminer toutes les lignes qui résultent de la pénétration des voûtes que l'on veut combiner, ainsi que celles provenant de l'intersection des diverses surfaces de joints. On doit donc prendre, autant que possible, un des deux plans de projection perpendiculaire à l'une des surfaces dont on cherche la pénétration, parce qu'alors (*Géométrie descriptive*) la trace de cette surface devient une des projections de la courbe, dont la seconde projection ne présente plus aucune difficulté.

2° Quand on a obtenu, sur l'épure, toutes les lignes de pénétration des deux voûtes et de leurs surfaces de joints, il faut reporter sur les blocs de pierre celles de ces lignes qui sont nécessaires à la détermination des coupes. Or toutes les fois que ces lignes seront obliques par rapport aux plans de projection, il sera nécessaire de faire une opération pour obtenir leur véritable grandeur, tandis que cette opération sera évitée pour toutes les lignes qui seraient parallèles aux plans de projection ; il résulte donc, de ce qui précède, que l'on doit, autant que possible, prendre les plans de projection,

1° *Perpendiculaires aux surfaces dont on doit chercher l'intersection avec d'autres surfaces;*

2° *Parallèles aux lignes dont il est nécessaire d'obtenir la véritable grandeur.*

375. Malheureusement, il est presque toujours impossible de satisfaire en même temps à ces deux conditions pour toutes les surfaces combinées dans une épure, mais on y supplée par des rabattements, des développements et des projections auxiliaires.

III.

376. **Rabattements.** — On sait (*Géométrie descriptive*) qu'une figure plane se projette suivant sa véritable grandeur toutes les fois qu'elle est parallèle au plan de projection ; il n'en est pas de même d'une face oblique. Pour avoir sa grandeur véritable, on suppose qu'elle tourne autour d'une droite située dans son plan et parallèle au plan sur lequel on veut faire le rabattement. Dans ce mouvement chaque point décrit un cercle dont le plan est perpendiculaire à la droite autour de laquelle se fait le rabattement, de sorte que si cette droite est perpendiculaire à l'un des plans de projection, le chemin parcouru par chaque point sera représenté sur ce plan par un arc de cercle ; d'où il suit *qu'une droite perpendiculaire à l'un des plans de projection, par conséquent parallèle à l'autre, est dans les conditions les plus favorables pour servir de charnière de rabattement.*

IV.

377. **Développements.** — Nous n'avons jusqu'ici employé que deux espèces de surfaces, le plan et le cylindre. Nous venons de voir que toutes les faces planes des pierres seront obtenues dans leurs véritables grandeurs soit par des projections sur des plans parallèles, soit par des rabattements. Les dimensions des faces cylindriques s'obtiendront par développements ; mais on sait (*Géométrie descriptive*) que pour développer un cylindre il faut :

1° *Construire dans sa véritable grandeur la section du cylindre par un plan perpendiculaire aux génératrices;*

2° *Rectifier cette courbe, à laquelle on donne le nom de section droite, en plaçant à la suite les uns des autres, et, dans leur véritable grandeur, tous les arcs dont elle se compose;*

3° *Enfin, construire chaque génératrice dans sa véritable grandeur, perpendiculairement à la section droite rectifiée.* Toutes ces opérations sont faciles lorsqu'on a soin de placer le cylindre que l'on veut développer, parallèlement à l'un des plans de projection. C'est ce que nous avons fait partout, excepté dans la descente biaise, planche 26.

On conçoit, en effet, que dans ces sortes de voûtes, un plan parallèle à la descente n'aurait pas été perpendiculaire au berceau dans lequel se fait la pénétration, ce qui aurait rendu beaucoup plus pénible la recherche de l'intersection des deux voûtes (*fig.* 190); aussi n'est-ce qu'après cette opération que l'on prend, pour faciliter le développement de la descente, un plan auxiliaire parallèle à sa génératrice.

V.

378. **Construction des données; choix de l'appareil.** — Les données sont de deux espèces : les unes résultent de l'ensemble du monument, de sa distribution intérieure et extérieure, et doivent être combinées de manière à satisfaire à toutes les lois de l'équilibre; telles sont les voûtes que l'on se propose de construire, leur épaisseur, ainsi que celle des murs destinés à les supporter. Ces données principales étant

admises, le constructeur devra déterminer l'appareil. Cette opération consiste dans le choix de toutes les coupes et surfaces de joints qui séparent les pierres les unes des autres. Nous avons dit que dans ce travail, on devait, autant que possible,

1° Éviter les angles aigus ;

2° Éviter les joints brisés ou courbes.

Mais plusieurs exemples précédents nous ont fait voir, que ce n'est souvent que par l'une de ces irrégularités que l'on peut éviter l'autre, et que les circonstances particulières de la question peuvent seules déterminer le parti que l'on doit prendre.

Il y a cependant des constructeurs qui ne veulent absolument pas d'angles aigus et font partout des crossettes. Quelques-uns, aussi, rejettent absolument les crossettes et préfèrent les angles aigus, tandis que d'autres, pour éviter les angles aigus, emploient partout, pour joints, des surfaces normales aux intrados, et ne font usage que des surfaces réglées.

On ne doit pas agir ainsi. En général, il ne faut pas se créer de système exclusif. Un angle différant peu d'un angle droit peut être employé sans inconvénients, surtout lorsque les faces, ou au moins l'une d'elles, coïncident avec celle d'une pierre adjacente, de manière que l'arête de l'angle aigu ne soit pas isolée. Ainsi, lorsqu'un berceau vient pénétrer obliquement dans un mur de face, il est évident que la douelle fait avec la face du mur des angles aigus exposés à être brisés par le moindre choc. Aussi n'avons-nous admis ces données que pour exercer à vaincre les difficultés qui résultent de l'irrégularité des coupes, et nous avons conseillé, lorsque ces angles sont très-aigus, de terminer le berceau par un petit cylindre perpendiculaire à la surface du mur d'entrée. Mais

nous avons laissé les angles aigus que les plans de joints font avec la douelle dans les berceaux biais et descentes, parce que si nous avions voulu employer, pour ces joints, des plans normaux aux cylindres d'intrados, il aurait fallu que ces plans fussent déterminés par des normales aux sections droites des berceaux, et dans ce cas les coupes provenant de l'intersection de ces joints avec les faces principales du monument n'auraient plus été perpendiculaires aux courbes d'entrée, ce qui non-seulement aurait été désagréable à l'œil, mais encore aurait, dans certains cas, rendu plus aigus les angles sur l'arête, toujours plus exposés à être brisés que ceux provenant de l'intersection des plans de joints avec la douelle.

Les joints brisés ou crossettes ont quelquefois l'avantage, comme nous l'avons vu dans les plates-bandes et dans quelques portes, d'empêcher les pierres de glisser. Mais il ne faut jamais employer ces sortes de coupes dans des pierres qui auraient peu d'épaisseur, surtout lorsque les deux parties de la pierre sont exposées à être pressées inégalement. Ainsi, par exemple, dans les pierres des plates-bandes et des portes, il est évident que si la partie horizontale qui est engagée entre deux assises du mur, était trop longue ou trop faible, la pression sur la partie inclinée de la pierre pourrait la faire rompre, tandis qu'aucun de ces effets n'est à craindre dans un joint brisé qui serait formé par deux faces verticales.

379. Les mêmes raisons qui engagent dans certains cas à rejeter les crossettes, doivent faire éviter, autant que possible, les joints courbes, surtout lorsqu'ils sont exposés à être pressés inégalement; car il est évident que si les deux surfaces de joints concaves et convexes ne sont pas taillées avec une identité parfaite, elles ne coïncideront pas parfaitement après la pose, et l'inégalité de pression fait rompre les pierres. Nous

verrons cependant par la suite beaucoup de cas où l'on ne peut pas éviter ces sortes de joints.

380. Nous avons toujours pris, pour directrices des berceaux, des demi-circonférences, parce que cette forme est préférée par les architectes modernes pour les ouvertures de portes et les cintres principaux. Mais il est évident que le travail serait le même pour toute autre courbe ; enfin c'est plutôt comme sujet d'exercices que nous avons pris des surfaces cylindriques pour extrados : on se dispense ordinairement dans la pratique de tailler ces surfaces qui sont presque toujours cachées. Seulement, si le berceau est d'une grande dimension, on fera bien de diminuer l'épaisseur des pierres formant la voûte, de manière à satisfaire, autant que possible, aux conditions énoncées n° 282. Nous traiterons ailleurs cette question avec de plus grands détails.

VI.

381. **Pénétrations.** — De toutes les combinaisons de deux cylindres, la plus simple et la plus importante est celle à laquelle nous avons donné le nom de voûte d'arête. Toutes les fois que deux voûtes se pénètrent, il y a un arêtier. On retrouve partout la pénétration des deux voûtes et l'intersection de leurs surfaces de joints.

Il faut étudier avec soin les descentes et surtout les descentes biaises, pour se familiariser avec les difficultés que présentent le raccordement des assises de hauteurs et d'inclinaisons différentes.

La nécessité de bien faire comprendre une épure engage souvent à construire beaucoup de lignes, qui ne servent qu'à compléter les projections et qui ne sont pas absolument indispensables. Ce travail a l'avantage d'exercer les commençants aux constructions graphiques; mais ils feront bien, à mesure qu'ils se fortifieront, de tâcher d'obtenir le plus directement possible les lignes nécessaires au tracé de la pierre, en négligeant toutes celles qui ne concourraient pas à ce but. On peut voir, par la comparaison des planches 17 et 18, combien cette attention peut quelquefois épargner de travail.

VII.

382. **Trompes.** — Nous n'avons parlé des trompes que comme exercice, et plutôt pour faire sentir les défauts de ces sortes de constructions que l'on doit éviter, et qui d'ailleurs sont entièrement rejetées de l'architecture moderne.

VIII.

383. **Taille.** — On a pu remarquer qu'il y a deux méthodes principales que l'on désigne de la manière suivante :

1° La méthode par équarrissement ;

2° La méthode par beuveau.

384. La première méthode consiste à dresser d'abord des

plans sur lesquels on rapporte, à l'aide des panneaux, les traces des surfaces que l'on veut tailler; puis on construit dans ces premières faces les traces de celles que l'on veut tailler après, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on soit parvenu à compléter la forme de la pierre.

385. Or, il est évident que dans ces opérations successives on doit commencer d'abord par les surfaces dont la taille est la plus simple, la moins coûteuse, et la plus susceptible d'exactitude. Ainsi, en général, on commence par tailler les faces planes, surtout, autant que possible, celles qui doivent faire partie de la surface apparente de la voûte. Quand les faces planes sont taillées, on y applique les panneaux de tête ou de joint, avec lesquels on trace les courbes qui doivent servir de directrices aux surfaces cylindriques. Enfin, les panneaux de développement appliqués dans ces surfaces déterminent les directrices des surfaces suivantes, etc.

386. La deuxième méthode, ou par *beuveau*, consiste à tailler une première face, plane ou courbe; puis après avoir construit les lignes suivant lesquelles cette face est rencontrée par les faces adjacentes, on taille ces faces suivant l'angle que chacune d'elles doit faire avec la première, en se servant, pour mesurer cet angle, de l'instrument nommé *beuveau*, qui se compose de deux morceaux de bois droits ou courbes, suivant que les faces sont elles-mêmes planes ou courbes; on cloue ces deux morceaux de bois ensemble solidement, après avoir déduit de l'épure l'angle que les faces font entre elles. Si le même beuveau devait servir un grand nombre de fois, on le ferait en fer.

On ne peut pas donner généralement de préférence à l'une des méthodes sur l'autre. Assez souvent la première produit

l'économie de la pierre en permettant de déterminer d'avance, d'une manière rigoureuse, les limites du plus petit bloc capable de la contenir, tandis que la seconde méthode épargne la main-d'œuvre, puisque l'on ne taille que les faces qui doivent servir. Aussi, un appareilleur habile emploie l'une ou l'autre méthode selon les circonstances, et souvent les fait concourir toutes les deux à la taille d'une même pierre.

LIVRE III.

SURFACES CONIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

Murs et Voûtes coniques.

I.

387. **Définitions.** — Soit (*fig.* 231, *Pl.* **30**) les projections horizontales de deux murs en talus ; si l'on veut éviter l'angle formé par la rencontre de ces murs, on raccordera leurs faces extérieures par une surface conique dont le sommet serait projeté sur le plan horizontal en s' et sur le plan vertical à la rencontre des deux droites *ae*, *cd* (*fig.* 232). Ce cône droit et à base circulaire sera coupé par les plans formant les lits des différentes assises du mur, suivant des cercles horizontaux dont les centres, situés sur l'axe du cône, se projetteront en un seul point s' (*fig.* 231).

La figure 232 est la coupe par un plan vertical conte-

nant l'axe du cône, et la droite *ae* fait connaître l'inclinaison du talus. On pourrait éviter les angles aigus que les faces horizontales des pierres font avec la face extérieure du mur, en faisant, à une certaine distance du talus, des coupes perpendiculaires à sa surface. Ces coupes seraient des surfaces coniques ayant leurs sommets sur l'axe du cône ; mais il est rare que l'inclinaison du talus soit assez considérable pour que l'on soit obligé de recourir à ce moyen, qui offre les inconvénients que nous avons signalés plus haut (253).

La surface intérieure du mur est un cylindre ayant pour rayon *s'u'*.

Taille de la pierre. Supposons, par exemple, une pierre de la troisième assise (*fig.* 233); on dressera, suivant l'épaisseur de la pierre, les deux faces horizontales sur lesquelles on appliquera les panneaux *r'u'v'x'*, *r'u'e'o'* (*fig.* 231); puis, en partageant les arcs *eo*, *vx* en parties égales, on aura les points par lesquels on doit faire passer la règle pour engendrer la surface conique, formant le talus du mur.

II.

388. **Cône oblique.** — Si l'on voulait raccorder un mur en talus avec un mur droit, on pourrait employer (*fig.* 234) un cône oblique dont le sommet, projeté sur le plan horizontal en *s'*, serait à l'intersection de la droite *ae*, *a'e'*, située dans le talus du mur et de la verticale *cd* (*fig.* 235). Ce cône serait tangent au mur incliné, suivant la droite *ae*, *a'e'*, située dans le talus du mur, et au mur droit suivant la verticale *cd*.

Les génératrices du cône se projetteront sur le plan horizontal par des lignes dirigées vers le point s'.

Les lits horizontaux des pierres couperont le cône suivant des cercles dont les centres se projetteront par des points $t'e'z'i'$, et qui auront pour rayons les horizontales menées de ces points à la droite ae, $a'e'$.

Les joints montants seront déterminés par des plans verticaux perpendiculaires à la trace du cône, ou, si l'on préfère, à la section horizontale faite à la moitié de la hauteur de chaque assise.

Ces plans étant parallèles à la verticale cd, leurs intersections avec la surface du cône seront des arcs de parabole. L'un des panneaux de joints a été rabattu sur l'épure (*fig.* 236).

On suppose que ce panneau a d'abord été ramené dans un plan perpendiculaire au plan vertical, en tournant autour de la verticale du point t', puis rabattu sur le plan horizontal autour de la trace horizontale $t's'$.

Taille de la pierre. On dressera d'abord (*fig.* 237) les deux faces horizontales, sur lesquelles on appliquera les panneaux $u'r'v'x'$, $u'r'h'o'$ (*fig.* 234); puis le panneau de joint vertical $rrox$, en ayant le soin de marquer les points où les contours de ces panneaux sont coupés par les génératrices du cône oblique.

III.

389. **Voûtes coniques.** — Soit (*fig.* 238) la projection horizontale d'une tour que l'on veut couvrir avec une voûte

conique, on disposera l'appareil comme on le voit figure 239. Les surfaces d'intrados et d'extrados de la voûte sont formées par deux cônes qui ont le même axe, et dont les sommets sont S et *s*. D'autres cônes perpendiculaires à l'intrados de la voûte sépareront les assises ; enfin les joints montants seront formés par des plans verticaux contenant l'axe de la tour.

Taille. On préparera une pierre sur le panneau de projection horizontale *aaoo* (*fig.* 238), et d'après l'épaisseur *eh*. Ce solide est compris entre deux cylindres concentriques, deux plans horizontaux et deux plans verticaux passant par l'axe du cône. Sa forme est absolument celle que nous aurions donnée à la pierre d'un mur droit, dont les assises auraient une épaisseur égale à *eh*. Quand cette pierre sera taillée, on appliquera sur ses deux faces verticales le panneau A (*fig.* 239) ; puis, avec un morceau de carton découpé, ou avec un compas dont on appuiera une pointe au bord de la surface cylindrique, on tracera les deux arcs horizontaux *cc*, *uu* (*fig.* 240) ; ensuite, avec une règle mince, à laquelle on fera prendre la courbure des surfaces cylindriques intérieure et extérieure, on tracera les deux arcs *aa*, *oo*. Enfin, en divisant en parties égales les quatre arcs de cercles *aa*, *oo*, *cc*, *uu*, on aura les points par lesquels il faut faire passer la règle pour engendrer les quatre surfaces coniques qui comprennent la pierre.

Si la voûte était très-surbaissée, il serait bon de faire les coupes de joints brisées, comme on le voit figure 241. Il y aurait alors pour chaque pierre huit surfaces coniques à tailler. On opérera comme précédemment, et le contour du panneau B déterminera tous les points par lesquels on doit faire passer les arcs de cercle destinés à servir de directrices à ces cônes.

IV.

390. **Autre méthode.** — Il y a dans la coupe des pierres deux espèces d'économie : 1° celle de la main-d'œuvre ; 2° l'économie des matériaux, et l'habileté consiste surtout à les combiner de la manière la plus avantageuse.

C'est donc une étude intéressante sous tous les rapports que de chercher les moyens de tirer la pierre que l'on veut tailler du plus petit bloc possible.

Soit (*fig.* 242) la projection horizontale d'une pierre appartenant à une voûte conique, projetée sur le plan vertical (*fig.* 243). On suppose, dans cette dernière projection, que la pierre est coupée au milieu de sa longueur par un plan parallèle au plan vertical, et contenant l'axe du cône.

La pierre sera tout entière comprise dans un prisme, ayant pour base le quadrilatère *aouc*, et pour longueur la droite *c'c'* (*fig.* 242).

Les génératrices des deux cônes qui forment l'intrados et l'extrados de la voûte, étant prolongées jusqu'au plan *cu*, perpendiculaire au plan vertical de projection et touchant la pierre en dessous, on déterminera facilement le contour de la figure suivant laquelle le plan *cu* coupe les deux surfaces coniques d'intrados et d'extrados, ainsi que les deux plans de joints verticaux. Ce panneau est rabattu en A, sur le plan horizontal qui contient la droite *cc'*. On déterminera de la même manière les courbes provenant des sections des mêmes surfaces par le plan *ao*, qui touche la pierre en dessus ; puis on rabattra cette figure A' sur le plan horizontal qui contient la droite *oo'*.

On décrira ensuite du point S comme centre, et avec les rayons S*i*, S*c*, deux arcs de cercles concentriques, et portant sur le premier les longueurs des parties qui composent l'arc horizontal *n'n'*, on aura le panneau B, qui est le développement de la face conique extérieure de la pierre. On construira de la même manière le panneau B', développement de la face conique intérieure.

Taille de la pierre. Après avoir taillé le prisme quadrangulaire (*fig.* 244) sur le panneau de projection verticale *aouc*, on appliquera les panneaux A, A' sur les deux faces correspondantes *cucu*, *aoao*. Les côtés droits de ces panneaux détermineront les plans verticaux formant les joints montants de la pierre, et les côtés courbes divisés en parties égales serviront de directrices à la règle pour engendrer les deux surfaces coniques d'intrados et d'extrados. Quand ces dernières surfaces seront taillées, on y appliquera les panneaux de développement B, B', et faisant prendre à ces panneaux la courbure des cylindres, on tracera les courbes qui doivent servir de directrices aux secondes surfaces coniques ; toutes les coupes seront alors déterminées.

CHAPITRE II.

Porte dans un mur conique.

I.

391. **Définitions.** — Soit (*fig.* 246, *Pl.* 31) la projection horizontale d'un mur en tour ronde et en talus, dans lequel on veut percer une porte cylindrique, on prendra un plan vertical de projection (*fig.* 247) perpendiculaire au cylindre de la porte. La douelle sera terminée par deux courbes à double courbure; la première, provenant de l'intersection du cylindre de la porte avec la surface intérieure du mur rond, aura pour projection verticale le demi-cercle *ace*, et pour projection horizontale l'arc $a'e'$. La pénétration du cylindre d'intrados de la porte, dans le cône formant le talus du mur, donne lieu à une seconde courbe à double courbure, ayant comme la première le demi-cercle *ace* pour projection verticale, et pour sa projection horizontale l'arc $a''c''e''$, que l'on obtiendra de la manière suivante. On construira (*fig.* 248) une droite *tr*, faisant avec le plan horizontal un angle égal à l'inclinaison du talus. On peut supposer que cette droite provient de la section du cône par le plan vertical $s'r''$, et que l'on a fait tourner cette section autour de la verticale tt'. Un plan horizontal contenant le point *u*, coupera la droite *tr* en

un point u'''; on projettera ce point sur $t'r'$, et on le ramènera sur $t'r''$ en le faisant tourner autour de la verticale tt'. Enfin, du point s' comme centre, on décrira l'arc de cercle $u''''u''$, provenant de l'intersection du cône par le plan horizontal uu'''. La rencontre de cet arc de cercle et de la perpendiculaire abaissée du point u, déterminera la projection horizontale de ce point. On construira de la même manière tous les autres points de la courbe, ainsi que les arcs d'ellipse provenant de l'intersection de la surface du cône par les plans de joints de la porte. Les deux courbes av, ex (*fig.* 247) sont des arcs d'hyperbole provenant de l'intersection du talus par les plans verticaux des pieds-droits de la porte; l'un de ces arcs est rabattu sur le plan vertical en tournant autour de la verticale du point a'', et l'autre en tournant autour de la verticale e''. Au surplus, c'est plutôt pour compléter l'ensemble des principes que nous avons parlé de ces panneaux, dont la courbure n'est jamais assez sensible pour qu'il soit nécessaire d'en faire usage dans la pratique. C'est encore dans le même but que nous avons construit la figure 249, qui serait la face verticale de la pierre A si on l'eût terminée à droite par un plan mn, perpendiculaire au plan vertical de projection. Mais il vaut mieux, comme nous l'avons fait ici, faire des coupes par des plans verticaux contenant le sommet du cône.

La figure 250 contient le développement de la douelle et le rabattement des panneaux de joints, qui se construisent comme dans tous les exemples précédents.

Taille de la pierre. On taillera d'abord un voussoir sur le panneau A (*fig.* 247), comme s'il s'agissait d'une porte droite; puis on appliquera le panneau de douelle, les panneaux de joints, et le panneau horizontal B, en ayant soin, comme nous l'avons dit précédemment, de marquer sur les contours de ces panneaux les points qui doivent déterminer

les diverses positions de la génératrice du cône, et du cylindre formant les surfaces du mur.

On aurait pu commencer par tailler les surfaces du cône et du cylindre formant les deux faces du mur. Il aurait fallu pour cela dresser d'abord deux plans horizontaux, l'un dessus, l'autre dessous la pierre, et tracer dans ces plans les arcs de cercle provenant de leur intersection avec les surfaces intérieure et extérieure du mur. Ces arcs seraient les directrices du cône et du cylindre, sur lesquelles on appliquerait les panneaux de développement qu'il faudrait construire, et dont les contours détermineraient la douelle et les plans de joints.

Mais la longueur du rayon qu'il faudrait employer pour construire le développement de la surface conique de la pierre A, fait préférer le premier moyen.

II.

392. **Porte pénétrant dans un cône oblique.** — *Données.* Soit s' (*fig.* 253) la projection horizontale du sommet du cône, dont la hauteur ss' est donnée; supposons de plus que la trace du cône soit un cercle $a''e''r$ dont le centre est en o.

Épure. En rabattant sur l'épure le plan vertical qui contient l'axe du cône, le sommet viendra se placer en s; la génératrice deviendra sr, et l'axe prendra la position so. L'épure étant ainsi disposée, si l'on conçoit un plan horizontal, contenant le point u (*fig.* 254), la section du cône par ce plan sera un cercle dont le centre, situé sur l'axe du cône, se projettera horizontalement en v', et l'extrémité du

rayon situé sur la génératrice *sr* aura sa projection horizontale en u^{IV}, de sorte que la projection horizontale du point *u* sera déterminée par la rencontre de la perpendiculaire uu' et du cercle $u'u^{IV}$ décrit du point v', comme centre avec le rayon $v'u^{IV}$. Les autres points de la projection horizontale se détermineront de la même manière.

La figure 255 contient le développement de la douelle et le rabattement des panneaux de joints.

III.

393. **Plate-bande dans un mur rond en talus.** — L'analogie de cette question avec celles qui précèdent nous dispensera d'entrer dans de plus grands détails. D'ailleurs les figures 256, 257, 258 indiquent suffisamment quelles sont les opérations à faire.

CHAPITRE III.

Portes coniques.

I.

394. **Définitions.** — Ces sortes de voûtes sont quelquefois employées comme soupiraux, abat-jour ou embrasures, pour le passage des canons dans les fortifications.

II.

395. **Porte conique dans un mur droit.** — Étant donné (*fig.* 259, *Pl.* 32), le trapèze *acc'a'* provenant de la coupe des murs par le plan de naissance de la voûte.

Épure. On prolongera les côtés obliques de ce trapèze jusqu'à leur rencontre en *s*. Ce point sera le sommet d'un cône formant l'intrados de la voûte. On prendra pour directrice de ce cône une courbe *aec*, dont la forme dépendra du plus ou moins d'élévation que l'on se propose de donner à la voûte. Après avoir partagé l'arc *aec* que nous supposerons circulaire, en autant de parties égales que l'on veut avoir de pierres, on déterminera l'appareil, puis on ramènera toute

cette figure dans le plan vertical *ap*. En joignant le sommet du cône avec les points de division de la courbe *aec*, on aura les projections des génératrices. Ces droites étant projetées sur le plan auxiliaire (*fig.* 260) rencontreront le plan vertical *e'p'* en des points qui, rabattus sur l'épure, feront connaître la pénétration dans l'autre face du mur. Cette courbe est un demi-cercle ayant pour diamètre *a'c'* : on fera passer les plans de joints par la droite *so*, qui joint le sommet du cône avec le centre de la directrice; d'où il résulte que ces plans couperont les faces horizontales des pierres suivant des parallèles à la droite *so*.

Si la directrice du cône différait beaucoup d'un arc de cercle, il serait bon de faire passer les plans de joints par des normales à cette courbe, et par le sommet du cône. Alors ces plans ne se couperaient pas suivant une droite commune, et leurs intersections avec les faces horizontales des pierres ne seraient point parallèles entre elles. Nous nous contenterons d'indiquer cette combinaison comme sujet d'exercice.

Taille de la pierre. Après avoir dressé la face horizontale supérieure et les deux plans de tête d'après l'épaisseur du mur, on appliquera d'abord le panneau horizontal *mnm'n'*, puis les deux panneaux de tête A et A', ce qui déterminera toutes les coupes.

III.

396. **Embrasure.** — La figure 262 est une double voûte conique résultant de la combinaison de deux surfaces coniques, et d'un petit cylindre ayant le même axe *ss'* que les deux cônes.

Épure. Supposons que l'on prenne le demi-cercle *aec* pour directrice du cône qui a son sommet en *s*; la section de ce cône par le plan vertical *a'c'* parallèle à *ac*, sera aussi un demi-cercle qui servira de directrice au petit cylindre. Enfin, la section de ce cylindre par le plan vertical *a''c''*, sera la directrice du second cône dont la pénétration dans l'autre face du mur se construira comme précédemment.

Taille de la pierre. Après avoir dressé le lit horizontal supérieur et les deux faces de tête, on appliquera le panneau horizontal *mnm'n'* (*fig.* 264), puis avec le panneau *mntr*, on tracera les deux arcs parallèles *tr* qui serviront de directrice à la surface cylindrique que l'on prolongera d'abord dans toute la longueur de la pierre. Enfin, on tracera les deux arcs *t'r'*, *t''r''*, qui, avec les courbes des panneaux A, A', serviront de directrices aux deux surfaces de cônes.

IV.

397. **Porte conique dans un talus.** —*Épure* (*fig.* 265). On prendra pour directrice du cône la pénétration dans l'une des deux faces du mur, et la pénétration dans l'autre face se déterminera comme précédemment.

Taille de la pierre. On dressera la face horizontale supérieure et la face du mur vertical, puis, à l'aide d'un beuveau ou d'un panneau découpé sur le contour de la projection auxiliaire rabattue (*fig.* 266), on fera le plan du talus. Enfin, on appliquera d'abord le panneau horizontal *mnm'n'* (*fig.* 267), et ensuite les deux panneaux A et A', chacun sur la face correspondante, ce qui déterminera toutes les coupes.

V.

398. **Porte conique dans une tour ronde.** — *Étant donnée* (*fig.* 267, *Pl.* **33**), la projection horizontale d'un mur rond, dans lequel on veut percer une ouverture conique, le sommet du cône étant situé en *ss'* sur l'axe de la tour ronde, on prendra pour directrice du cône une courbe *ce*, que l'on suppose rabattue sur le plan horizontal (*fig.* 268); on déterminera sur cette figure, le nombre des voussoirs, ainsi que les traces des plans de joints et les hauteurs d'assises; puis on ramènera le tout dans le plan vertical *op*, ce qui fera connaître les projections horizontales et verticales de toutes les arêtes. Les génératrices du cône seront dirigées vers le sommet, tandis que les intersections des joints par les plans horizontaux seront parallèles à l'axe du cône.

Les deux cylindres concentriques formant les faces intérieure et extérieure du mur rond, étant perpendiculaires au plan horizontal de projection, les courbes de pénétration de ces cylindres par le cône auront pour projections horizontales les deux arcs de cercle *ao*, *v'u'*. En élevant des perpendiculaires par les points où ces deux arcs sont rencontrés par les projections horizontales des génératrices du cône, on construira (*fig.* 269) les projections verticales des deux courbes de pénétration; on déterminera de la même manière les arcs d'ellipse provenant de l'intersection des deux surfaces du mur rond par les plans de joints, et l'on construira pour plus de précision un point intermédiaire pour chaque courbe.

Les deux projections horizontales et verticales étant construites, on prendra (*fig.* 267), toutes les parties de l'arc

$m'a'12n'3o3$, et plaçant toutes ces parties à la suite les unes des autres sur une droite (*fig.* 270), on élèvera par chaque point une perpendiculaire sur laquelle on déterminera le point correspondant, dont on prendra la hauteur (*fig.* 269). On aura par ce moyen le développement de la figure d'appareil dans la surface convexe de la tour ronde; on construira de la même manière le développement de la surface concave (*fig.* 271).

Taille de la pierre. On taillera la pierre sur le panneau de projection horizontale $3m't'x'3$ (*fig.* 267), puis on placera le panneau horizontal *mtxzn* (*fig.* 272), et les deux panneaux de développement A et A', auxquels on fera prendre la courbure des surfaces cylindriques; alors toutes les coupes seront déterminées.

VI.

399. **Lunette conique, pénétrant dans un berceau horizontal.** — *Les données sont :*

1° *Fig.* 273. La projection horizontale des murs et de l'ouverture de la lunette;

2° *Fig.* 274. La section droite du berceau horizontal;

3° *Fig.* 275. La courbe *ae*, directrice de la surface conique.

Épure. On déterminera d'abord l'appareil sur la figure 275, que l'on ramènera dans le plan vertical *op*, ce qui déterminera les projections horizontales et verticales de toutes les arêtes.

Les génératrices du cône seront dirigées vers le sommet, et les autres arêtes des pierres seront parallèles à l'axe du cône. Le cylindre d'intrados du berceau étant perpendiculaire au plan vertical de projection, la courbe de pénétration aura pour projection verticale l'arc de cercle *ve*. En abaissant des perpendiculaires par les points où cet arc est rencontré par les projections verticales des génératrices du cône, on déterminera la projection horizontale de la courbe de pénétration.

Les arêtes de douelle de la lunette conique ne rencontrant pas celles du berceau horizontal, on joindra ces lignes par des arcs d'ellipse résultant de l'intersection de l'intrados du berceau cylindrique par les plans de joints de la lunette.

Pour déterminer, par exemple, le point *cc'* appartenant à l'un de ces arcs, on joindra (*fig.* 274) le point *c* avec le sommet du cône par une droite *cs*, qui sera située dans le plan de joint de la lunette. Cette droite percera le plan vertical *op* en un point *t*, qui rabattu en t'' (*fig.* 275) et ramené en *t'*, déterminera la projection horizontale *t's'* de la droite *st*, et la rencontre de la droite *s't'* avec la perpendiculaire abaissée du point *c* fera connaître la projection *c'* de ce point.

On emploiera le même moyen pour obtenir un point intermédiaire de l'arc 2*c'*, ainsi que pour construire les autres arcs d'ellipse 1*b'*, 3*d'*, etc.

Les droites (*bn*, *b'n'*); (*cz*, *c'z'*); (*dh*, *d'h'*), sont les intersections des joints des deux voûtes; toutes ces droites concourent au sommet du cône, ce qui n'aurait évidemment pas lieu si le sommet du cône n'était pas sur l'axe du cylindre, ou seulement si les plans de joints des deux voûtes

ne contenaient pas leurs axes, ou enfin si les plans de joints contenant les axes, ces deux droites ne se coupaient point.

On fera bien pour s'exercer d'introduire dans la question quelqu'une de ces difficultés.

La figure 276 est le développement de la surface d'intrados du berceau cylindrique, et la figure 277 est le développement de celle du cône. Pour ménager la place on peut, comme nous l'avons fait ici, placer toutes les douelles les unes sur les autres, d'autant plus que le cône que nous avons employé étant circulaire, toutes ces douelles sont de même largeur et ne diffèrent que par leur longueur. Ces longueurs sont déduites de la figure 274, en supposant que chaque génératrice du cône tourne autour de l'axe pour venir se placer sur la génératrice *se*.

La figure 278 contient les panneaux de joints; on suppose que l'on a d'abord fait tourner tous ces panneaux autour de l'axe du cône pour les ramener dans le plan vertical *o'p'* (*fig.* 275), puis qu'on a fait avancer ce plan jusqu'à la droite *or*, et qu'enfin on l'a rabattu sur l'épure. Les longueurs des panneaux sont données par la figure 273.

Taille de la pierre (*fig.* 279). On préparera une pierre sur le panneau de projection verticale *mkhd*22 (*fig.* 274), puis on tracera le panneau A (*fig.* 275) sur la face verticale faisant partie du mur extérieur, enfin on appliquera dans la surface cylindrique du berceau le panneau de développement A' en lui faisant prendre la courbure du cylindre; les courbes des deux panneaux A et A' serviront de directrices à la surface conique formant l'intrados de la lunette.

Deuxième méthode. On peut préparer d'abord la pierre

sur le panneau de projection horizontale (*fig.* 273), puis on tracera la courbe 2*d* dans le plan vertical perpendiculaire à la direction du berceau, ainsi que dans le petit plan vertical 3*y*, que l'on aura réservé pour cet usage; enfin, après avoir taillé la surface cylindrique formant l'intrados du berceau horizontal, on y appliquera le panneau de développement A′ qui avec le panneau A déterminera toutes les coupes.

Troisième méthode. On préparera la pierre sur le panneau de projection auxiliaire (*fig.* 275), puis on appliquera le panneau A sur la face verticale du mur, et le même panneau prolongé jusqu'aux points 2 et 3 sur la face verticale contenant l'arête *qy;* les contours de ces panneaux détermineront la surface conique, et les plans de joints que l'on taillera d'abord, et sur lesquels on appliquera les panneaux de douelle et de joints correspondants (*fig.* 277, 278); enfin le panneau de projection vertical (*fig.* 274), complétera le tracé de toutes les coupes.

VII.

400. **Lunette conique biaise.** — *Étant données :* 1° (*fig.* 280, *Pl.* **34**) les projections horizontales des murs, et l'ouverture d'une lunette conique biaise;

2° (*fig.* 282) la section droite d'un berceau horizontal dans lequel la lunette doit pénétrer.

Épure. On prolongera les droites *a′v′*, *e′u′*, jusqu'à leur rencontre en *s′*, et l'on prendra ce point pour sommet de

la surface conique formant l'intrados de la voûte. On pourrait prendre pour directrice de ce cône une courbe quelconque située dans la face extérieure du mur, mais il sera plus simple, si toutefois cela peut s'accorder avec les dispositions principales du bâtiment, de prendre pour directrice une demi-circonférence dont la projection horizontale serait $m'n'$ perpendiculaire à la droite $s'o'$ qui partage en deux parties égales l'angle $a's'e'$: par ce moyen, la surface d'intrados de la lunette sera celle d'un cône droit à base circulaire, et les constructions seront plus simples.

On projettera la courbe $mn\ m'n'$ sur un plan perpendiculaire à l'axe du cône, et rabattu sur l'épure figure 281.

Les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, qui partagent l'arc de cercle mn en sept parties égales, étant projetés (*fig.* 280) sur la droite $m'n'$, on construira les projections horizontales des génératrices du cône.

Les mêmes points m, 1, 2, 3, 4, 5, 6, n, ainsi que le sommet du cône étant projetés sur le plan vertical de la figure 282, on construira les projections sur ce plan de toutes les génératrices du cône.

Les intersections de ces génératrices avec le plan vertical $o''p''$ étant rabattues (*fig.* 283), feront connaître la courbe suivant laquelle la surface d'intrados de la lunette pénètre dans la face extérieure du mur. Cette courbe est un arc d'ellipse. Les coupes des joints seront dirigées vers le point o', et les hauteurs d'assises seront déterminées à volonté sur cette figure, au-dessus toutefois des points où les arêtes d'intrados rencontrent la courbe $a'c'''e'$.

La projection horizontale de la pénétration du cône dans le berceau, les intersections des joints des deux berceaux, et toutes les arêtes des pierres se construiront comme dans l'exemple précédent.

La figure 284 est le développement de la figure d'appareil provenant de la pénétration de la douelle de la lunette et des plans de joints dans l'intrados du berceau horizontal. Pour construire cette figure on a considéré l'arc *vi* (*fig.* 282) comme section droite du berceau; on a porté toutes les parties de cette courbe à la suite les unes des autres (*fig.* 284), sur une ligne *vi* perpendiculaire à la direction du berceau, et par chaque point on a mené une perpendiculaire dont la longueur a été donnée par la figure 280. On n'oubliera pas que les coupes de joints *qi*, etc., sont des courbes pour la construction desquelles on devra prendre un point intermédiaire, que l'on projetterait sur l'arc *vi* (*fig.* 282), et par suite dans le développement (*fig.* 284).

La figure 285 contient toutes les douelles placées les unes sur les autres, comme dans l'épure précédente. Les longueurs des arêtes de douelle s'obtiennent en les faisant tourner autour de l'axe du cône, pour les rabattre dans le plan horizontal, sur la droite $s'u'e'$.

La figure 286 contient tous les panneaux de joints.

Les plans de joints, passant par l'axe du cône, sont perpendiculaires au plan qui contient la figure 281, et sont projetés sur cette figure par des droites concourant vers le point o. L'ellipse *ace* est la projection de la pénétration du cône dans la face extérieure du mur, et la courbe *vqu* est l'intersection des deux voûtes. Après avoir projeté tous les sommets de chaque panneau de joint sur la trace du plan qui le contient (*fig.* 281), on a supposé ici que tous ces plans étaient ramenés dans le plan vertical contenant l'axe du cône, puis avancés jusqu'au plan $o''p$, et enfin rabattus sur l'épure (*fig.* 286). Les longueurs de ces panneaux sont déduites de la figure 280.

La figure 287 contient les deux beuveaux construits sui-

vant les angles aigus et obtus formés par les axes du cône et du cylindre.

Taille. On peut, comme précédemment, préparer la pierre sur le panneau vertical ou horizontal, ou enfin sur le panneau A (*fig.* 281). Dans ce dernier cas, la pierre étant terminée par deux plans perpendiculaires à l'axe du cône, on tracera sur ces plans les deux arcs de cercle suivant lesquels ils rencontrent la surface de la douelle, et l'on taillera cette surface, sur laquelle on appliquera le panneau flexible de douelle (*fig.* 285). On placera les panneaux de joints de la lunette en creusant la pierre pour le panneau inférieur; puis, avec un panneau relevé sur le plan horizontal supérieur, ou bien avec le beuveau (*fig.* 287), on tracera (*fig.* 288) la droite *ld* qui représente la direction du berceau ; on fera le plan *lk* perpendiculaire à cette droite et l'on y appliquera le panneau vertical $r''dix''z''$ (*fig.* 282); toutes les coupes seront alors déterminées.

CHAPITRE IV.

Trompe conique.

I.

401. **Définitions.** — Soit donnée (*fig.* 289, *Pl.* **35**), la coupe des murs par le plan horizontal de naissance de la trompe, et supposons, pour plus de régularité, que l'angle $m's'n'$ soit un angle droit : on prendra pour surface de douelle de la trompe un cône droit ayant son sommet en s', et dont la directrice serait un demi-cercle projeté sur le plan horizontal par la droite $m'n'$; si l'on prend un plan vertical de projection parallèle à cette courbe, on aura pour sa projection la demi-circonférence *mon* (*fig.* 290), et l'axe du cône se projettera par un point *s*.

Construction de l'épure. Les plans de joints passant par l'axe du cône, couperont sa surface suivant des droites dont les projections verticales concourront en *s* et les projections horizontales en s'. On fera passer ces droites par les points 1, 2, 3, qui partagent en parties égales la demi-circonférence *mon*.

La pénétration du cône formant la douelle de la trompe

dans les faces extérieures des murs se composera de deux arcs de parabole. Ces arcs, situés dans les plans verticaux, qui forment les faces des murs, auront pour projections horizontales les deux droites $e'm'$, $e'n'$.

Pour construire leurs projections verticales, on peut élever des perpendiculaires par les points où les projections horizontales des génératrices du cône rencontrent les traces des plans verticaux $e'm'$, $e'n'$. Ainsi la perpendiculaire élevée par u' déterminerait le point u; mais il sera plus exact de faire tourner ce point autour de l'axe du cône, pour le rabattre sur le plan horizontal en u'', puis de le projeter en u''' et le faire revenir de là en u sur la droite s-3 ; on opérera de même pour tous les autres ponts.

L'inclinaison de la surface conique de la trompe ne permet pas de prolonger jusqu'à cette surface le cylindre formant le joint de trompillon ; on terminera ce joint par une seconde surface conique ayant son sommet en s'', et pour directrice le demi-cercle xz, $x'z'$; l'intersection de ce second cône par un plan $t'r'$ parallèle au plan vertical de projection, sera un demi-cercle que l'on prendra pour directrice du cylindre formant le joint du trompillon.

La figure 291 donne dans leur véritable grandeur les intersections de la douelle et des joints par les plans verticaux $e'm'$, $e'n'$; ce dernier plan est rabattu sur le plan vertical, en tournant autour de la droite ls'''; les hauteurs de chaque point sont déduites de la figure 290.

La figure 292 contient les panneaux de joints, que l'on a rabattus sur le plan horizontal, après les avoir fait avancer parallèlement à eux-mêmes jusqu'au point s'''. Les largeurs de ces panneaux sont déduites de la figure 290 et les longueurs de la figure 289.

La figure 293 est le développement de la douelle. Du point s''' comme centre, avec un rayon $s''''m$ égal à $s'm'$, on a décrit l'arc de cercle m, 1, 2, 3, 3, sur lequel on a porté les parties du cercle *mon* (*fig.* 290), et l'on a fait passer par chaque point de division une des génératrices rabattues dans leur véritable grandeur sur la droite $s'e''$ (*fig.* 289), ou sur $s''''e''''$ (*fig.* 292, 293).

Enfin si l'on veut tailler par beuveau, il faudra chercher les angles que font entre eux les plans de joints, la douelle et les faces du mur.

Ainsi la figure 296 est le développement du trièdre formé au point u par le plan de joint sq, la face verticale du mur, et le plan qui contiendrait les deux arêtes de douelle $s3$, $s2$ (*Géométrie descriptive*).

L'angle a appartient au panneau D (*fig.* 291).

L'angle c du panneau de joint est donné par la figure 292.

Et l'angle b (*fig.* 293) appartient à la douelle considérée ici comme plane.

On développerait de la même manière les trièdres formés par les autres panneaux de douelle et de joints.

Taille de la pierre. On fera un voussoir sur le panneau de projection verticale figure 290; on tracera sur le plan horizontal supérieur le panneau horizontal $k'h'v'q'$, et l'on fera (*fig.* 294) le plan verticale vqu, sur lequel on appliquera le panneau D (*fig.* 291). L'arc de ce panneau et l'arête du trompillon, que l'on tracera dans la surface cylindrique du voussoir, serviront de directrices à la surface conique de la trompe. On tracera ensuite dans le plan vertical hk le petit arc du cercle tr, qui doit servir de directrice au cylindre formant

le joint du trompillon que l'on taillera en refouillant la pierre jusqu'à ce que l'on puisse tracer le petit arc situé dans le plan $t'r'$; cet arc, avec l'arête xz, serviront de directrices au joint conique du trompillon.

Taille par beuveau. On prendra un bloc capable de contenir la pierre (*fig.* 297); puis, après avoir dressé une face, on y appliquera le panneau E (*fig.* 293). Ce panneau déterminera le contour de la douelle que l'on suppose plate, on taillera ensuite les faces adjacentes de joints et de tête, suivant les angles que ces faces doivent faire avec la première, et l'on se servira pour cela des beuveaux donnés par la figure 296; puis appliquant les panneaux de joints (*fig.* 292) et le panneau D (*fig.* 291), toutes les faces seront déterminées. On creusera ensuite la douelle et les surfaces du trompillon comme ci-dessus.

Trompillon (*fig.* 295). Après avoir taillé un cylindre sur le panneau demi-circulaire tr (*fig.* 290), et d'une longueur égale à celle du trompillon, on décrira sur l'une de ses bases le demi-cercle xz, et l'on tracera sur la surface convexe du cylindre le demi-cercle dont la projection horizontale est $t'r'$ (*fig.* 289); enfin on déterminera la position du sommet s' dans le lit de pose, et toutes les coupes seront tracées.

402. La comparaison des figures 294 et 297 confirme ce que j'ai dit plus haut, que la méthode *par équarrissement* exige en général moins de pierre que la méthode par *beuveau;* en effet, il est évident que l'on pourrait faire servir ici toute pierre qui aurait une longueur convenable, et dont une face contiendrait le panneau de projection verticale (*fig.* 290). De plus la facilité que l'on a d'apprécier la position de la pierre dans le solide qui l'enveloppe, permettra d'utiliser

un bloc tronqué à l'endroit où doit se trouver l'évidement de la trompe, tandis que la position inclinée de la pierre dans le bloc d'où on la tire, en employant la méthode par beuveau, ne permet pas d'évaluer aussi exactement au premier coup d'œil l'étendue du solide capable de contenir le voussoir. C'est donc à tort que quelques personnes sont disposées à regarder la méthode par beuveaux comme occasionnant *toujours* moins de déchet. Cette erreur provient de ce qu'assez souvent les constructeurs, soit par le manque d'habitude de la géométrie, soit pour économiser le temps, ne jugent pas à propos de faire les opérations graphiques nécessaires pour déterminer *à priori* le plus petit solide capable ; opérations qui, dans certains cas, présentent quelques difficultés.

On peut dire que ces opérations consistent *en général :*

1° *A projeter la pierre sur un plan perpendiculaire à sa plus grande longueur ;*

2° *A construire le plus petit rectangle circonscrit à sa projection.*

Ce rectangle et la longueur de la pierre seront les dimensions du plus petit bloc qui puisse la contenir.

On pourrait aussi déterminer d'avance le plus petit solide nécessaire pour tailler par beuveau. Il faudrait :

1° *Projeter la pierre sur le plan qui contient la face par laquelle on veut commencer, et construire le plus petit rectangle circonscrit à cette projection*, ce qui fera connaître deux dimensions de la pierre.

2° *Déterminer la distance de la première face taillée, au point de la pierre qui en est le plus éloigné.*

On peut encore ajouter que la méthode par beuveau ne pré-

sente quelque avantage que dans le cas où la voûte ne doit pas être extradossée par une surface définie, ou lorsque l'extrados est sensiblement parallèle à l'intrados.

Cependant, on ne doit donner à l'une des deux méthodes sur l'autre qu'une préférence relative et dépendante, non-seulement de la forme plus ou moins simple que doit prendre la pierre, mais encore de l'exactitude avec laquelle il est nécessaire qu'elle soit taillée; or il est certain, abstraction faite de l'économie des matériaux, que si la méthode par beuveau est plus expéditive en ce qu'elle permet de tailler directement les faces mêmes de la pierre, elle offre des chances d'inexactitude dans la combinaison des erreurs; car en taillant successivement les faces d'après les angles qu'elles doivent faire avec celles déjà taillées, les erreurs que l'on aurait pu faire dans les angles que les premières faces font entre elles se combineront avec les erreurs qui existeraient dans les angles des dernières faces; et ces erreurs, dépendant souvent des mêmes causes, telles que l'imperfection des beuveaux ou équerres dont on se sera servi, seront souvent dans le même sens, et ne se compenseront que très-rarement; tandis que dans la méthode par équarrissement, on est assez souvent, il est vrai, conduit à tailler des plans qui ne doivent pas faire partie de la surface définitive de la pierre; mais ces faces, presque toujours à angles droits, servant en quelque sorte de plans de projection, permettent de construire avec la plus rigoureuse exactitude, et indépendamment les unes des autres, les traces des faces que l'on doit tailler ensuite. C'est donc surtout dans les occasions qui exigent de l'exactitude que l'on doit donner la préférence à la méthode par équarrissement, tandis que la méthode par beuveau tire son avantage de l'économie de la main-d'œuvre.

II.

403. **Trompe biaise dans un mur en talus.** — *Les données* sont (*fig.* 299, *Pl.* **36**) la coupe des pieds droits par le plan de naissance, et (*fig.* 300) l'angle d'inclinaison du talus que nous supposons ici projeté sur un plan perpendiculaire à la direction du mur dans lequel la trompe est construite.

Épure. On prendra pour surface d'intrados de la trompe un cône circulaire ayant son sommet en s', et pour axe la droite $s'o'$, qui partage l'angle $m's'e'$ en deux parties égales.

La directrice de ce cône sera un demi-cercle ayant pour projection horizontale la droite $m'n'$, perpendiculaire à l'axe du cône.

Les points $m'n'$ étant projetés en m et en n sur un plan perpendiculaire à l'axe du cône, on supposera ce plan rabattu sur l'épure (*fig.* 301), et l'on construira le demi-cercle m, 1, 2, 3, 4, n, pour seconde projection de la directrice. Les droites $s1$, $s2$, $s3$, $s4$, seront les traces des plans de joints, et en même temps les projections des génératrices du cône sur le plan de la figure 301.

Les points 1, 2, 3, 4, ramenés sur la droite $m'n'$ (*fig.* 299), détermineront les projections horizontales des génératrices. On projettera ensuite le sommet du cône et les points 1, 2, 3, 4, sur le plan vertical (*fig.* 300), et l'on construira sur ce plan les projections des génératrices, dont les intersections, avec la trace du talus $m''p''$, détermineront

tous les points de la courbe $m'ce'$, qui provient de la pénétration du cône dans le talus. Cette figure est rabattue sur l'épure (*fig.* 302).

La surface de la trompe étant celle d'un cône circulaire, le plus simple serait de prendre pour arête du trompillon un demi-cercle dont le plan serait perpendiculaire à l'axe du cône ; mais par suite de l'irrégularité de l'appareil, il sera plus convenable ici de prendre pour contour apparent du trompillon une ellipse verticale et parallèle à la trace du talus. Cette ellipse servira de directrice à un cône dont nous prendrons le sommet au point $a'a''$, déterminé par la droite $a''y''$, perpendiculaire à $s''c''$ (*fig.* 300). Cette surface, prise pour joint du trompillon, ne sera pas exactement perpendiculaire à l'intrados de la trompe, mais les angles aux points x' et z' différeront si peu de l'angle droit, qu'ils peuvent être adoptés sans inconvénient. La section de ce second cône par un plan vertical $t'r'$ parallèle à $x'z'$ sera une seconde ellipse semblable à la première, et que l'on prendra pour directrice du cylindre formant la surface du trompillon. Ces deux ellipses avancées parallèlement à elles-mêmes sont rabattues (*fig.* 305) dans leurs véritables grandeurs.

La figure 306 est le développement de la petite portion du cylindre du trompillon retranchée par le biais du mur.

La figure 303 est le développement de la douelle de la trompe. Cette figure, dans laquelle la douelle de chaque pierre est considérée comme plate, se construira comme dans l'exemple précédent. Du point s''' comme centre, avec un rayon $s'''m'''$ égal à $s'm'$, on décrira l'arc de cercle $m'''n'''$, sur lequel on portera les points 1, 2, 3, 4, n''', dont les distances en ligne droite sont déduites de la figure 301 ; puis

on joindra chacun de ces points avec s''' par un rayon sur lequel on portera la génératrice correspondante que l'on obtient dans sa véritable longueur, en la faisant tourner autour de l'axe du cône jusqu'à ce qu'elle coïncide avec la droite $s'm'$.

La figure 304 contient les panneaux de joints. On suppose ici que chacun de ces panneaux, tournant autour de l'axe du cône, a été ramené dans le plan vertical *sp*, puis avancé et rabattu sur l'épure (*fig.* 304). Les largeurs de ces panneaux sont données par les distances de chacun de leurs points à l'axe du cône, représenté par le point *s* sur la figure 301, et les longueurs sont déduites des figures 299 et 303.

Le lecteur aura sans doute remarqué la ressemblance entre la disposition de cette épure et celle de la planche 34. Cette analogie est une conséquence naturelle de celle qui existe entre les deux voûtes. En effet, toute la différence entre une trompe et une lunette conique, c'est que, dans cette dernière voûte, la surface du cône traverse les deux faces du mur, tandis que dans la trompe le sommet est compris dans l'épaisseur du mur.

Taille. Quand on aura taillé la pierre sur le panneau de la projection A (*fig.* 301), on placera le panneau horizontal *qvhk* (*fig.* 299) et les deux panneaux de joints (*fig.* 304), ce qui déterminera le plan vertical du mur biais, et le talus sur lequel on tracera le contour du panneau A′ (*fig.* 302); ensuite, dans la surface cylindrique déterminée par le contour du panneau A on tracera l'arête du trompillon, parallèle à la face verticale du mur. Cette courbe, avec celle du panneau A′, dirigeront la génératrice de la surface conique de la trompe. Enfin, on pourra tailler la surface cylindrique déterminée par le joint du trompillon, en faisant glisser l'arc corres-

pondant de l'ellipse *tr*, rabattue (*fig.* 305) sur les deux côtés horizontaux et parallèles des panneaux de joints, en maintenant toujours la courbe dans un plan parallèle à la face verticale du mur, ou bien en faisant glisser l'arc d'ellipse *tr* (*fig.* 301) perpendiculairement aux deux côtés des panneaux de joints.

Quant au joint conique du trompillon, il aura pour directrices les deux arcs correspondants des courbes $t'r'$, $x'z'$.

Trompillon. On taillera un cylindre droit sur le panneau elliptique *tr* (*fig.* 301); puis, enveloppant sur ce cylindre le petit panneau de développement (*fig.* 306), on fera aux extrémités du cylindre les sections biaises appartenant à la face verticale du mur et au plan vertical qui contient l'arête $x'z'$ du trompillon, que l'on tracera dans ce plan au moyen de la plus petite des deux courbes rabattues (*fig.* 305). On déterminera la position du point s' dans le lit de pose du trompillon, et l'on tracera sur le cylindre l'ellipse *tr*, parallèle aux sections biaises de ce cylindre, ce qui déterminera toutes les coupes.

On peut encore tailler le trompillon de la manière suivante. On dressera d'abord le lit de pose et les deux plans verticaux contenant la face du mur et l'arête $x'z'$ du trompillon; on appliquera sur ces faces le panneau (*fig.* 305). La plus grande des deux ellipses sera la directrice du cylindre, et la plus petite servira pour tracer l'arête du trompillon, enfin le point *s* étant placé dans le lit de pose, toutes les coupes seront tracées.

Parmi les moyens indiqués ci-dessus pour tailler la pierre, il n'a pas été question des panneaux de douelle (*fig.* 303). On n'aura besoin de se servir de ces panneaux que dans le cas

où l'on voudrait tailler la pierre par beuveau ; alors on opérerait exactement comme nous l'avons dit (401). Mais il faudrait auparavant construire les beuveaux en développant (*Géométrie descriptive*) les trièdres formés par les panneaux de joints, de tête et de douelle considérés comme plats.

III.

404. Trompe conique supportant une tourelle. — La figure 309 est la coupe par le plan de naissance.

La figure 310 est la projection sur un plan perpendiculaire à l'axe du cône, formant l'intrados de la trompe ; *mun* est la courbe à double courbure, provenant de l'intersection du cylindre de la tourelle, par la surface conique de la trompe.

La figure 311 est le développement de la moitié de la surface cylindrique de la tourelle ; enfin les figures 312 et 313 contiennent le développement de la douelle et le rabattement des panneaux de joints. Chaque douelle est considérée comme plate, c'est-à-dire que l'on a pris les distances en ligne droite des points *m*1, 1-2, 2-2 (*fig.* 310) pour les porter (*fig.* 312) sur l'arc *m*1, 2-2, décrit avec un rayon égal à *s'm'*.

Taille. La pierre étant taillée sur le panneau de projection verticale A (*fig.* 310), on appliquera le panneau horizontal *hkvmq* ; puis on taillera la surface cylindrique de la tourelle,

sur laquelle on enveloppera le panneau A' (*fig.* 311); le reste ne présentera plus de difficultés. La forme symétrique de cette trompe permet d'employer la méthode par beuveau; pour cela, on fera passer par le point *cc'* un plan perpendiculaire à la ligne de naissance *s'n'*. Ce plan contient l'angle formé par la première douelle et par le plan horizontal; on rabattra cet angle sur l'épure, en prenant la hauteur du point *c* au-dessus du plan horizontal, et portant cette hauteur de *c'* en *c''*; puis on construira le beuveau, qui servira pour toutes les pierres; car le cône étant circulaire, toutes les douelles plates feront le même angle avec les plans de joints. Cela étant fait, on dressera d'abord le plan qui contient les deux arêtes de la douelle, puis avec le beuveau on fera les plans de joints, sur lesquels on appliquera ensuite les panneaux de joints: ce qui déterminera les faces verticales et horizontales de la pierre. On tracera le panneau horizontal *hkvm'q*, et l'on taillera la surface cylindrique de la tourelle, sur laquelle on appliquera le panneau de développement A'. Enfin on creusera les joints cylindriques et coniques du trompillon, dont l'arête, avec la courbe du panneau A', serviront de directrices à la douelle.

IV.

405. **Application des trompes.** — *Données.* Soit (*fig.* 315, *Pl.* **37**) le plan d'un espace rectangulaire formant la cage d'un escalier. Le carré *s'm'e'n'* étant la projection horizontale de l'un des paliers, on pourra soutenir cette partie par une trompe conique, ayant son sommet en *s'*. La directrice du cône, formant l'intrados de cette voûte, serait une ellipse rabattue (*fig.* 317), et dont la hauteur, égale à la moitié de *ne*

(*fig.* 316), dépend du plus ou moins d'élévation que l'on veut donner à la voûte.

Après avoir établi sur la courbe *m''c''n''* (*fig.* 317), les points de division des voussoirs, on ramènera ces points sur la projection horizontale *m'n'* (*fig.* 315), et de là sur la projection verticale (*fig.* 316) en prenant les hauteurs (*fig.* 317). On construira les projections verticales et horizontales des arêtes d'intrados et l'arc de parabole *se*, provenant de l'intersection du cône de la trompe par le plan vertical *m'e'*. Un autre arc de parabole égal au premier sera situé dans le plan *e'n'*, et se projettera sur le plan vertical par la droite *en*. On déterminera les hauteurs d'assises sur les deux figures 316 et 317, et l'on en déduira les projections horizontales des faces de joints ; ainsi le joint de la clef sera le pentagone projeté sur le plan horizontal par *v'u'z'z'x'*.

Les côtés de ce pentagone sont :

1° *L'arête d'intrados* v'u' ;

2° *La droite* u'z' *provenant de l'intersection du plan de joint par le plan vertical* n'e' ;

3° *La droite* z'z', *intersection du plan de joint par le plan horizontal* rz (*fig.* 316) ;

4° *La droite* z'x', *intersection du plan de joint par la face intérieure du mur formant la cage de l'escalier ;*

5° *Enfin la petite droite* x'v', *suivant laquelle le plan de joint est terminé par la surface du trompillon.*

On aurait pu prolonger le plan de joint dans l'épaisseur du mur ; mais il est préférable de faire les coupes comme on le voit sur les figures 319, 321. Cette disposition d'appareil a

l'avantage de conserver au mur toute la force nécessaire pour soutenir les constructions supérieures.

Si les dimensions de la trompe sont trop grandes, on fera les pierres de plusieurs morceaux. Nous avons supposé ici que la clef était composée de trois parties : l'une (*fig.* 319), qui est posée sur le trompillon ; la deuxième partie (*fig.* 320), qui se place sur la première, et qui contient la naissance des deux rampes ; enfin, un troisième morceau placé derrière le second, et qui se rattache à l'ángle du mur principal. Le deuxième morceau (*fig.* 320), est le plus important : il est séparé du troisième par un joint vertical, représenté en plan par la droite *ti*, et du premier morceau par un joint conique ayant son sommet en *e'*, et pour directrice l'arc 3-3. L'intersection de ce cône par le lit supérieur de la deuxième assise est un arc d'hyperbole que l'on voit sur la figure 315.

Les panneaux de joints, étant perpendiculaires au plan de la projection (*fig.* 317), seront représentés sur cette figure par des lignes droites. On suppose ici que ces panneaux ont été avancés parallèlement à eux-mêmes jusqu'au point *o*, puis rabattus sur le plan horizontal de projection.

Le joint du trompillon est un cône qui a pour directrice une ellipse semblable à la directrice de la trompe.

Au lieu de soutenir le palier par une trompe, on pourrait employer un quart de voûte en arc-de-cloître (*fig.* 318).

406. Les arcs de parabole *se*, *en* (*fig.* 316) serviront de directrices à des portions de voûtes cylindriques, destinées à soutenir les rampes. Ces parties de voûtes cylindriques, construites en saillie parallèlement à la surface d'un mur

droit, se nomme *encorbellement*. On peut disposer l'appareil comme on le voit (*fig.* 316), et si les rampes avaient beaucoup de longueur, on répéterait plusieurs fois le même appareil.

Pour ne rien ôter à la solidité du mur, on fera bien de conserver horizontale une partie de l'épaisseur des pierres de la descente, comme nous venons de le dire pour la trompe conique.

L'inclinaison de l'appareil dispense de s'assujettir à la division en un nombre impair de voussoirs, la clef devant être remplacée par le voussoir qui s'approche le plus de la position verticale.

407. L'assise supérieure de l'encorbellement est souvent trop éloignée du mur pour que les pierres qui la composent puissent être engagées solidement dans la masse; dans ce cas, il sera nécessaire de les rattacher au reste de la construction par les moyens suivants. On pourra faire le joint du dernier voussoir en forme de crossette, comme on le voit par la coupe de la pierre *a* (*fig.* 318). Si avec cela on fait, dans le plan supérieur de cette pierre, un petit renfoncement destiné à recevoir une saillie correspondante, que l'on réservera au-dessous de la marche, il est évident que la dernière assise ne pourra ni glisser sur le joint de l'assise inférieure, ni s'éloigner du mur principal, dans lequel la marche est scellée par son autre extrémité.

On peut aussi rattacher les pierres les unes aux autres, comme on le voit (*fig.* 322); ainsi, le pierre *a* serait liée avec la pierre *b*, soit par des tenons, soit par des crossettes, et les

pierres *b* se rattacheraient de la même manière aux pierres *c*, qui sont engagées dans la construction.

Si l'escalier avait peu de largeur, on pourrait tailler les marches de manière qu'elles formeraient la dernière assise de l'encorbellement, chaque marche étant scellée dans le mur par un bout, et portant à l'autre extrémité un morceau incliné du limon (*fig.* 323).

Enfin, on peut tailler l'assise supérieure en plate-bande (*fig.* 318).

Il est inutile d'ajouter que les coupes *a* et *c* (*fig.* 318) ne sont pas nécessaires pour les pierres formant les angles des paliers, qui sont suffisamment maintenues par la poussée des rampes.

Nous ne parlons pas ici des crampons, goujons et armatures de toutes espèces, fréquemment employés dans les constructions, réservant pour une autre partie l'exposé des moyens de solidité qui ne résultent pas directement de la forme particulière des coupes.

Taille. Supposons, par exemple, que l'on veuille tracer la clef de la trompe conique; on préparera une pierre sur le contour de la projection horizontale, en y comprenant les coupes perpendiculaires aux deux rampes. On fera l'angle rentrant $b'e'd'$; on appliquera le panneau triangulaire A sur le plan vertical $e'd'$, ce qui déterminera l'inclinaison de la rampe montante. On fera un plan perpendiculaire à cette inclinaison, et l'on appliquera le panneau de section droite B; ensuite on renversera le panneau A, que l'on appliquera ainsi renversé dans le plan vertical $b'e'$; on tracera les arêtes de la rampe

descendante, puis on fera le plan perpendiculaire à cette rampe, et l'on tracera le contour du panneau B.

Le panneau E (*fig.* 317), étant appliqué dans le plan vertical *ti*, déterminera les plans de joints, et le petit cylindre horizontal contenant l'arc 3-3, que l'on tracera au moyen d'une règle flexible.

Pour tracer la douelle de la trompe, on pourra employer deux moyens : le premier consiste à tailler d'abord les douelles cylindriques des descentes, sur lesquelles on appliquera le panneau de développement F (*fig*, 316) ; le côté gauche de ce panneau déterminera l'arête de raccordement de la trompe et de la rampe montante ; et le côté droit servira pour tracer l'arc qui appartient à la rampe descendante.

Deuxième moyen. On taillera la douelle de la rampe supérieure jusqu'au plan vertical *e'n'* que l'on réservera, et sur lequel on tracera le petit arc de parabole *eu*. On fera la même opération du côté de la rampe inférieure ; ce qui présentera un pe u plus de difficulté à cause de l'inclination de la descente : les deux arcs symétriques *eu* et l'arc 3-3 serviront de directrices à la surface conique de la trompe.

Pour le joint conique du trompillon, on creusera la pierre avec précaution à la hauteur du plan horizontal, qui doit contenir le panneau C. L'arc d'hyperbole, qui termine ce panneau, provient de l'intersection du joint conique du trompillom par le lit supérieur de la deuxième assise. Cette courbe et l'arc 3-3 serviront de directrices au joint du trompillon.

On terminera par le plan horizontal du palier, sur lequel on placera le panneau D, dont les côtés, perpendiculaires

aux faces des murs, détermineront les naissances des rampes.

Des moyens analogues seront employés pour tracer les autres voussoirs.

Le trompillon ne présentera pas de difficultés; l'arête du joint conique (*fig.* 317) et le petit arc de parabole (*fig.* 324) suffiront pour déterminer toutes les coupes.

CHAPITRE V.

Arrière-voussures coniques.

I.

408. **Définitions.** — Les surfaces coniques sont encore employées quelquefois pour former la voûte de certaines portes, auxquelles on donne le non de portes en voussures : ces voûtes se nomment aussi *arrière-voussures*.

Soit, par exemple (*fig.* 325, 328, *Pl.* **38**), la coupe des pieds-droits d'une porte par le plan de naissance. La surface à couvrir se compose de deux rectangles et d'un trapèze.

La partie rectangulaire $a'c'a''c''$, comprise entre les tableaux des jambages, et qui représente l'ouverture de la porte, sera couverte par un demi-cylindre circulaire, perpendiculaire au plan vertical de projection, et dont la trace sur ce plan serait le demi-cercle *aec*.

Le petit rectangle $v'u'v''u''$ sera couvert par un second cylindre également circulaire, dont la trace sur le plan vertical est le demi-cercle *v4u*. Nous avons donné plus haut (285) à ce

renfoncement cylindrique le nom de feuillure. Cet espace est destiné à recevoir les vantaux de la porte lorsqu'elle est fermée.

Enfin, on pourra couvrir le trapèze $v''u''b'd'$ par une portion de la surface d'un cône oblique qui aurait pour directrice le cercle de feuillure $v4u$, et dont le sommet aurait pour projections les deux points s,s'. La pénétration de ce cône dans la face apparente du mur sera un arc de cercle $b1d$, que l'on nomme arc de tête, et dont le centre est situé en i.

Presque toujours cet arc fait partie des données de la question; de sorte que le cône, formant la douelle de la voûte, doit être choisi de manière que sa surface contienne les deux cercles parallèles $v4u,b1d$. Pour satisfaire à ces conditions, on projettera sur un plan auxilliaire (*fig.* 327) les deux points 1 et 4, qui sont les plus élevés des deux cercles donnés, et l'on joindra ces points par une droite qui sera l'une des génératrices du cône. On projettera pareillement, sur le plan auxiliaire, les points o et i en o'' et i'', et la rencontre de la ligne 1-4 avec $o''i''$, qui représente l'axe du cône, fera connaître la projection s'' du sommet, d'où il sera facile de déduire ses deux autres projections s et s'.

Les côtés obliques $v''b'$, $u''d'$ du trapèze (*fig.* 325, 328) seront les traces de deux plans verticaux que l'on nomme plans d'ébrasement, et contre lesquels viennent s'appliquer les vantaux de la porte lorsqu'elle est ouverte. Ces plans couperont la surface conique de l'arrière-voussure, suivant deux arcs d'hyperbole, que l'on pourrait construire en élevant des perpendiculaires par les points où les droites $v''b'$, $u''d'$ sont coupées par les génératrices du cône. Mais comme ces intersections se font suivant des angles très-aigus, il sera plus exact d'établir, sur la surface du cône, un cer-

tain nombre de cercles parallèles au plan vertical, et d'élever des perpendiculaires par les points où les projections horizontales de ces cercles sont coupées par les traces des plans d'ébrasement.

Si l'on veut que les cercles tracés passent par les points 1,2,3,4, qui partagent la droite 1-4, en parties égales, on déterminera leurs centres en partageant la distance des centres oi, $o''i''$, en autant de parties égales.

Les surfaces qui doivent composer la douelle de la voûte étant adoptées, il s'agit de déterminer l'appareil. Pour cela, on partagera le cintre de la porte en autant de parties que l'on veut avoir de pierres, et l'on fera passer un plan de joint par chacun des points de division, et par l'axe du cylyndre d'intrados. Par suite de cette disposition, les arêtes d'intrados dans le cylindre de la porte et dans la feuillure seront des lignes droites; mais dans la surface conique, elles deviendront des arcs d'hyperbole; leurs projections verticales se confondront avec les traces des plans de joints. Quant à leurs projections horizontales, on les obtiendra en abaissant des perpendiculaires par les points où les traces des plans de joints rencontreront les projections verticales des cercles 1,2,3,4, situés, comme nous l'avons dit, sur la surface du cône.

On n'a construit sur l'épure que la moitié de l'appareil, en réservant l'autre moitié pour la description de la surface conique.

La figure 330 contient les trois panneaux de joints rabattus sur l'épure, dans leurs véritables grandeurs. On peut supposer ici que le premier est rabattu sur un plan horizontal mp, en tournant autour d'une ligne passant par le point m, et perpendiculaire au plan vertical de projection. Le second

panneau est rabattu sur le plan horizontal *nq*, et le troisième sur un plan *rg*.

La figure 331 est le rabattement du plan d'ébrasement, terminé par l'arc d'hyperbole suivant lequel ce plan coupe la surface de la voussure.

Enfin la figure 332 est la face de la pierre A, qui coïncide avec le parement du mur.

409. Avant de tailler la pierre, il reste encore à faire une opération importante, et sans laquelle le travail pourrait être défectueux. Cette opération a pour but de s'assurer que la voussure est suffisamment surhaussée, pour ne pas gêner le mouvement du vantail. Il pourrait arriver, en effet, que les données eussent été prises de telle manière que le vantail en s'ouvrant toucherait la surface du cône avant d'arriver au plan d'ébrasement, contre lequel il ne pourrait plus s'appliquer. Pour s'assurer que ce défaut n'a pas lieu, on s'y prendra de la manière suivante. Par un point *w* quelconque, pris sur le cercle de feuillure, concevons un plan horizontal, et construisons la courbe *w'-3-l* (*fig.* 328) provenant de l'intersection de la voûte par ce plan. L'intersection de cette courbe par l'arc de cercle horizontal que parcourt le point *w* du vantail sera le lieu où ce point viendrait toucher la surface conique. Si cette intersection est en dehors du trapèze $v''u''b'd'$, on en conclura que le point *w* ne peut pas toucher la voûte, puisqu'il faudrait pour cela qu'il passât à gauche du plan débrasement. Les mêmes opérations, recommencées à des hauteurs différentes, feront connaître si quelque point peut toucher la voûte avant que le vantail ait achevé son mouvement. Dans ce cas, il faudrait prendre d'autres données, et recommencer l'épure; mais le plus habituellement, les constructeurs négligent cette partie de la question; et

lorsque après la pose, l'arrière-voussure ne se trouve pas assez surhaussée, ils font disparaître sur place ce qui gêne le mouvemenr du vantail, en altérant le moins possible la surface primitive de la voûte.

Taille. On fera un voussoir sur le panneau de projection verticale A (*fig.* 329), puis on appliquera les panneaux de joints (*fig.* 330) et le panneau vertical A′ (*fig.* 332). Les droites *by* et *yz* détermineront le plan d'ébrasement que l'on taillera en fouillant la pierre jusqu'à ce qu'on puisse appliquer le panneau *byz* (*fig.* 331). Les points de repère marqués sur les courbes *b*1, 1-4, *tz*, et *zb* détermineront les positions de la génératrice de la surface conique de l'arrière-voussure. La figure 333 représente la pierre en perspective.

II.

410. **Deuxième arrière-voussure conique.** — Le cintre de la porte étant déterminé par l'arc de cercle *ae* et l'arc de tête étant *bi* (*fig.* 334), parallèle au plan vertical de projection, on prendra pour surface d'intrados un cône dont le sommet aurait sa projection verticale en *s*, dans le prolongement de *ab*, et sa projection horizontale en *s*′ sur le prolongement de *a*′*b*′. Les droites génératrices de ce cône seront les arêtes d'intrados, et par conséquent les plans de joints contiendront le sommet du cône; mais pour éviter les angles aigus que les coupes feraient avec l'arc de tête, on brisera le joint, comme on le voit (*fig.* 335), de sorte qu'une portion du joint contiendra la droite *uz* perpendiculaire au cintre de la porte,

tandis que le reste sera déterminé par la droite *vn* perpendiculaire à l'arc de tête.

On aurait pu aussi prolonger ces deux faces du joint jusqu'à leur rencontre *u'r'*, ou bien encore faire passer le plan de joint par l'arête d'intrados et par la normale à une section moyenne du cône.

Taille. On fera un voussoir sur le contour de la projection verticale ; puis le panneau A et le panneau horizontal A' détermineront toutes les coupes.

III.

411. **Troisième arrière-voussure.** — La voussure est composée ici (*fig.* 336) d'un cône elliptique dont le sommet aurait sa projection horizontale en *s'*, et sa projection verticale en *o*, centre du cercle *ec*.

Les plans de joints perpendiculaires au cylindre de la porte, seront brisés par une coupe perpendiculaire à l'ellipse *td*. L'intersection des deux voûtes sera une courbe à double courbure (*ce*, *c'e'*) dont la construction ne présente pas de difficulté.

La figure 337 contient le développement de chaque douelle.

On doit remarquer que cette forme de voûte ne peut être employée que pour un passage qui ne serait pas fermé ou dont la porte ne s'élèverait pas jusqu'au cintre circulaire,

car il est évident que la surface cylindrique gênerait le mouvement du vantail autour de l'arête verticale du point c, c'.

Taille. On fera le voussoir sur la projection verticale (*fig.* 336), puis on placera le panneau de développement de la douelle avec lequelle on tracera l'arêtier, ce qui, avec le panneau A (*fig.* 338) suffira pour déterminer toutes les coupes.

LIVRE IV.

SURFACES SPHÉRIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

Voûtes sphériques.

I.

412. **Appareil par assises horizontales.** — La disposition d'appareil la plus simple, et qui satisfait le mieux aux conditions de l'équilibre, est celle qui est représentée (*fig.* 339, *Pl.* **39**). Les arêtes d'intrados sont des cercles horizontaux, les lits sont des surfaces coniques, ayant leurs sommets au centre de la sphère, et les joints verticaux sont des plans méridiens. L'extrados est une calotte sphérique, appartenant à une sphère dont le centre serait situé au-dessous du plan de naissance de la voûte.

La construction de cette épure ne présentant aucune difficulté, nous ne nous y arrêterons pas.

Taille de la pierre. Il y a plusieurs manières de tracer et de tailler les voussoirs des voûtes sphériques.

413. *Première méthode ou par équarrissement.* On opérera comme nous l'avons fait (389) pour les voûtes coniques. On préparera une pierre sur le contour de la projection horizontale $v'v'c'c'$ (*fig.* 340, 341). Cette pierre sera comprise entre deux plans horizontaux, éloignés l'un de l'autre de toute l'épaisseur de la pierre, deux plans verticaux passant par l'axe de la sphère, et devant contenir les faces des joints montants, et les deux cylindres concentriques, entre lesquels la pierre se trouve comprise. On tracera, sur les plans verticaux des joints montants, le contour du panneau A (*fig.* 339). Ce qui déterminera toutes les arêtes de la pierre.

Pour tailler la douelle, on partagera les deux arcs horizontaux ($aa, a'a'$) (cc, cc') en un même nombre de parties égales, puis on fera glisser sur ces deux arcs une cerce découpée en bois dur ou en fer, en ayant soin de faire passer cette cerce par les points correspondants, et de maintenir son plan perpendiculairement aux deux arcs que l'on prend ici pour courbes directrices.

414. La méthode précédente est celle que l'on doit préférer pour les premiers voussoirs, surtout pour ceux qui se raccordent avec les assises horizontales du mur circulaire; mais il est évident que pour les voussoirs supérieurs, le déchet serait considérable, indépendamment de la perte de temps nécessaire pour tailler les faces horizontales et cylindriques, qui ne servent qu'au tracé de la pierre. Ces inconvénients ont engagé quelques auteurs à proposer les moyens suivants.

Soit (*fig.* 342) la projection horizontale d'une des pierres de la voûte sphérique précédente, et (*fig.* 343) la projection

verticale de la même pierre que nous supposons ici coupée par le plan méridien qui la partage en deux parties symétriques. Le rectangle *mnbd*, circonscrit à la projection verticale, sera la base d'un parallélipipède qui contiendra la pierre. La longueur de ce parallélipipède sera la ligne *m'n'*. On remarquera, de plus, que le plan *sn* coupe la surface de la sphère, suivant un cercle qui a pour diamètre *vu*, et dont la circonférence contient les quatre angles de la douelle.

415. De la disposition d'épure précédente, on déduira ce moyen de tailler la pierre. Après avoir choisi (*fig.* 344) un bloc capable de contenir le voussoir, on dressera la face *mmnn* qui doit contenir les quatre angles de la douelle; puis après avoir tracé la droite *su*, on déterminera la position du point *o*, en portant la distance *mo* (*fig.* 343) sur *su*, à partir du bord *mm* de la pierre; puis, du point *o* comme centre avec un rayon *ov* moitié de *vu*, on décrira le cercle *caac* qui termine la calotte sphérique, contenant la douelle de la pierre que l'on veut tailler. On découpera ensuite une cerce B (*fig.* 345) sur la courbure d'un des grands cercles de la sphère; puis on creusera la pierre avec précaution jusqu'à ce qu'on puisse appuyer les deux extrémités de la cerce sur deux points opposés de la circonférence *caac*, et faire pivoter cette cerce autour du centre, de manière que son plan reste perpendiculaire à celui du cercle *caac*. Les appareilleurs donnent le nom d'écuelle à une pierre ainsi préparée.

Il s'agit actuellement de tracer le contour de la douelle dans la calotte sphérique que l'on vient de tailler. Ce contour se compose de quatre arcs de cercle, savoir, deux arcs horizontaux *aa*, *cc*, appartenant à des petits cercles de la sphère; plus deux arcs verticaux (*ac*, *a'c'*) situés dans les plans méridiens formant les joints montants du voussoir. Or le plan *sn*

(*fig.* 343) étant prolongé suffisamment rencontre l'axe vertical de la sphère en un point *s*, que l'on peut considérer comme le sommet d'un cône circulaire sur la surface duquel seraient situées les deux courbes (*aa*, *a'a'*) (*cc*, *c'c'*); de sorte que, si l'on plaçait à ce point *s* une pointe de compas, ou l'une des extrémités d'un fil inextensible dont la longueur serait égale à *sh*, l'autre extrémité du fil décrirait évidemment, sur la surface de la sphère, l'arc de cercle *chc*.

D'après cela, on disposera sur le chantier une pierre, de manière que l'une de ses faces soit dans le prolongement du plan *mmnn* (*fig.* 344), à une distance telle que l'on puisse porter la distance *ms* égale à la même longueur *ms* prise sur la figure 343; de sorte que le point *s* sera établi dans le prolongement du plan *mmnn* de la pierre qui contient la calotte dans la même position relative que sur l'épure.

Il résulte de ce qui précède que, si l'on prend une ouverture de compas égale à *sh* (*fig.* 343), et que l'on place une des pointes sur le point *s* de la figure 344, on pourra décrire, dans la calotte sphérique, le même arc que l'on décrirait sur la sphère en plaçant l'une des pointes du compas sur le point *s* de la fig. 343. On décrira de même l'arc *aed*. On pourrait obtenir les centres des grands cercles *ac*, *ac*, en déterminant les points où le plan *sn* prolongé rencontrerait les diamètres horizontaux perpendiculaires aux plans de ces grands cercles; mais cette construction peut être évitée de la manière suivante. On décrira, dans la calotte, et du point *s* comme centre, avec un rayon égal à *st* (*fig.* 343), l'arc *iti*, sur lequel on portera, à droite et à gauche du point *t*, les longueurs égales *ti* données par la projection horizontale (*fig.* 342). On pourrait même par ce moyen déterminer autant de points intermédiaires sur les arcs *ac*, *ac*.

Nous venons de dire qu'il fallait disposer une pierre qui ait

une de ses faces dans le prolongement du plan *mmnn*, et à une distance suffisante pour que l'on puisse y établir le point *s* qui doit servir de centre aux deux ars *aea*, *chc*. L'embarras qui résulte de ces dispositions préliminaires peut être évité de la manière suivante.

416. On déterminera d'abord sur la circonférence *caac* la position des quatre angles de la douelle; on découpera ensuite, sur la projection horizontale (*fig.* 342), une cerce coïncidant avec l'arc *c'h'c'*; puis en plaçant les points *cc* sur les points correspondants de la pierre, on posera la cerce dans la surface concave de la calotte, et l'on tracera l'arc *che*. On fera la même opération pour l'arc *aea*.

Quant aux arcs des grands cercles *ac*,*ac*, il est évident que ce moyen ne suffirait plus; car, en découpant une cerce sur la courbure d'un grand cercle de la sphère, et plaçant les extrémités de la corde sur les points *a* et *c*, il serait très-difficile de maintenir le plan de la cerce dans une position normale à la surface da la calotte, ce qui est absolument nécessaire pour tracer un arc de grand cercle.

Dans ce cas, on pourra clouer (*fig.* 346) une seconde cerce perpendiculaire à la première; de sorte que l'assemblage de ces deux cerces ne pourra prendre qu'une position normale à la sphère.

Enfin, on pourra tracer avec une cerce *iti* un arc de parallèle moyen, sur lequel on portera, à droite et à gauche du point *t*, deux distances égales à la corde *it* (*fig.* 342).

417. Si la sphère était d'un rayon tellement grand qu'il n'y eût aucune différence sensible entre l'arc *ac* et sa corde, on pourrait considérer la douelle du voussoir, comme une partie de la surface du tronc d'un cône que l'on développerait

(*fig.* 347), et que l'on appliquerait dans l'écuelle (*fig.* 344); mais ce moyen ne serait pas applicable aux voûtes d'un petit rayon.

Lorsque le contour de la douelle sera tracé dans l'écuelle, le reste ne présentera plus de difficultés. On construira (*fig.* 348) un beuveau dont une branche sera taillée sur la courbure d'un grand cercle de la sphère, et l'autre branche suivant le prolongement du rayon. Cela fait, on taillera toutes les faces des joints en maintenant, comme on le voit (*fig.* 349), le plan du beuveau perpendiculaire aux courbes formant le contour de la douelle.

Quand toutes les surfaces adjacentes à la douelle seront taillées, on tracera dans ces faces le contour de l'extrados, en appliquant le panneau vertical C sur les plans des joints montants, et traçant dans les joints coniques des courbes parallèles aux arêtes de douelles. On taillera ensuite l'extrados avec une cerce concave, que l'on fera glisser sur les deux arcs horizontaux et parallèles à l'extrados.

Si l'on veut appliquer la méthode précédente à la taille des voussoirs portant crossette, par exemple à une pierre de la seconde assise de la figure 339, on taillera d'abord la douelle et les faces de joints comme nous venons de le dire; puis on tracera le contour du panneau A sur les plans des joints montants; enfin, en creusant la pierre avec précaution, on fera les deux petits plans *vu*, *zx*, sur lesquels on décrira les arcs parallèles devant servir de directrices au cylindre formant la surface extérieure du mur.

II.

418. **Appareil dit cul-de-four.** — Les figures 350, 351, sont les deux projections d'un quart de voûte sphérique appareillée en cul-de-four.

Les arêtes de douelle sont des cercles parallèles au plan vertical de projection. Les rangs successifs de voussoirs sont compris entre des cônes concentriques, ayant leur sommet au centre de la sphère, et pour axe commun le diamètre perpendiculaire au plan vertical de projection. Les voussoirs d'un même rang sont séparés les uns des autres par des plans contenant la droite *bd*.

Cet appareil ne diffère du précédent que par la position des rangs de voussoir; de sorte qu'il suffirait de renverser la figure 339 pour avoir celle qui nous occupe actuellement. Aussi, l'analogie complète qui existe entre la forme des pierres dans les deux cas, nous dispensera d'entrer dans de plus grands développements, tous les procédés que nous avons indiqués plus haut pouvant s'appliquer ici.

III.

419. **Appareil par enfourchement.** — On pourra (*fig.* 352) disposer l'appareil de manière que les projections horizontales des arêtes de douelle soient parallèles aux côtés du carré inscrit dans le grand cercle de naissance. Il résulte de cette combinaison que les arêtes d'intrados, qui n'attein-

dront pas le plan de naissance, formeront sur la surface de la sphère des quadrilatères curvilignes projetés sur le plan horizontal par des carrés concentriques ; les rangs supérieurs des voussoirs formeront, par leur rencontre, des pierres que l'on nomme voussoirs d'enfourchement, et dont les projections sont désignées par les lettres *a* et *a'*.

Si les arêtes de la douelle étaient prolongés jusqu'à leur rencontre, les premiers voussoirs d'enfourchement se termineraient par des angles beaucoup trop aigus, comme on peut s'en assurer par l'inspection des pierres à gauche de la figure 352. Pour éviter cet inconvénient, on coupera ces angles comme on le voit à droite de la même figure.

Nous allons nous occuper de l'étude de l'un des voussoirs d'enfourchement et de la manière de le tailler.

420. Soient (*fig.* 353 et 354) les projections verticales et horizontales du voussoir. La douelle est terminée par huit arcs de cercle, savoir, les six arcs (*ac*, *a'c'*) (*gc*, *c'g'*) (*ag*, *a'g'*) (*ei*, *e'i'*) (*ii*, *i'i'*) (*ei*, *e'i'*) perpendiculaires au plan horizontal, plus les deux arcs inclinés (*ae*, *a'e'*) (*ae*, *a'e'*) provenant de l'intersection de la sphère par des plans contenant les rayons *ox*, *ok*. Les surfaces de joints, contenant ces deux derniers arcs, seront des plans, et toutes les autres seront des cônes ayant pour sommet commun le centre de la sphère.

L'inspection des épures 352, 354 et 353 indiquant suffisamment les moyens de construire les deux projections du voussoir, nous ne parlerons que des opérations nécessaires pour le tailler. On construira d'abord (*fig.* 355) une projection auxiliaire, parallèle au plan *oc*, qui partage le voussoir

en deux parties symétriques. Sur cette projection, les points symétriquement placés se projetteront en un seul; ainsi, par exemple, les deux points désignés sur les projections primitives par les lettres e, e', se projetteront sur le plan auxiliaire par le point e''; il en sera de même de toutes les autres parties du voussoir. Il résulte de là que la droite $m''n''$ pourra être considérée comme la trace d'un plan qui contiendra les quatre angles (ee, ii) de la douelle, et comme ces points appartiennent en même temps à la surface de la sphère, ils seront situés sur la circonférence du cercle provenant de la section de la sphère par le plan mn, et la calotte sphérique provenant de cette section contiendra la douelle tout entière.

D'après cela, on choisira une pierre ayant pour dimensions principales les côtés du rectangle $m''n''b''d''$, et pour longueur la distance $t't'$; puis, après avoir dressé la face $mmnn$ (*fig.* 356), on décrira le cercle $eeii$ avec un rayon égal à la moitié de $v''u''$ (*fig.* 355); et l'on creusera ensuite l'écuelle comme dans l'exemple précédent. Pour tracer le contour de la douelle, on remarquera que le plan $m''n''$ coupe les rayons horizontaux ox, oc, ok, en trois points x, s, x, qui, établis sur le prolongement du plan mn, comme ils le sont sur l'épure, pourront servir de points de centre pour tracer les six arcs verticaux ac, cc, ca, ei, ii, ie. On construira la droite xsx (*fig.* 350), en prenant la distance sx sur la figure 354; les ouvertures de compas seront données par les figures 353 et 355 : ainsi l'on décrira les arcs ac avec des ouvertures de compas égales à la distance du point x au point l où l'arc du grand cercle ql est coupé par le plan vertical qui contient l'arc ac; la distance des arcs ei aux points x se déterminera de la même manière.

On prendra de même sur la figure 355, les distances du

point *s* aux points où l'arc de grand cercle *v''u''* est coupé par les plans verticaux des arcs (*c'c'*, *c''*) (*i'i'*, *i''*).

Les arcs *ac*, *cc*, *ca*, *ei*, *ii*, *ie*, étant tracés dans l'écuelle, les points *ee*, *ii*, *cc*, seront déterminés : nous nous rappelons que les quatre premiers sont situés sur la circonférence du cercle de la calotte; d'ailleurs les points *ii* sont à l'intersection de l'arc *ii* avec les deux arcs *ie*; enfin, les points *c* sont à la rencontre de l'arc *cc* avec les arcs *ca*. Il ne reste donc plus qu'à tracer les deux arcs de grands cercles *ea*, *ea*. On pourrait obtenir des points de centre, en prolongeant le plan *mmnn*, jusqu'à sa rencontre avec les deux diamètres de la sphère, perpendiculaires aux plans des arcs *ae*. Mais, cette opération assez composée pourra être évitée de la manière suivante. On prendra (*fig.* 353) la longueur de la corde qui sous-tend l'arc *ac* parallèle au plan vertical, et l'on portera cette longueur, à partir du point *c*, sur les deux arcs correspondants, tracés dans l'écuelle, ce qui déterminera les points *a*; ensuite on tracera, en opérant comme ci-dessus, les arcs *zr*, et prenant sur l'épure la grandeur de leurs cordes, on les portera dans l'écuelle de *z* en *r*, et par ce moyen on aura autant de points que l'on voudra de l'arc *are*.

Il est inutile d'ajouter que, dans la pratique, l'éloignement du centre permettra rarement de tracer les courbes de la douelle avec un compas; dans ce cas, on pourrait employer de longues tringles de bois servant en quelque sorte de compas à verge, et dont une extrémité servirait à tracer la courbe, tandis que l'autre extrémité serait maintenue au centre par un ouvrier. Au surplus, c'est plutôt comme exercice que nous indiquons ces moyens qui sont rarement employés, et auxquels on préfère habituellement l'emploi des cerces.

Il faut observer cependant que la projection (*fig.* 353) ne donnerait que les deux cerces *ac*, *ei*, avec lesquels on pourrait tracer quatre arcs de la douelle; les deux cerces *cc*, *ii*, sont rabattus sur le plan horizontal (*fig.* 354), et les deux arcs de grands cercles *ae*, *ae* se traceraient avec des cerces disposées comme celle de la figure 346; la figure 357 représente le voussoir taillé.

CHAPITRE II.

Voûtes sphériques sur un plan carré.

I.

421. Définition. — Les figures (358, 359) (364, 365), *Pl.* **40**, sont les deux projections horizontales et verticales de deux voûtes sphériques construites sur deux plans carrés. Dans la première les arêtes de douelle sont horizontales, et dans la seconde elles sont situées dans des plans verticaux.

Le rayon de la sphère est égal à la moitié de la diagonale du carré que la voûte doit couvrir. Les côtés de ce carré sont les traces de quatre plans verticaux qui coupent la voûte sphérique et en retranchent quatre calottes que l'on remplace par des murs auxquels on donne le nom de *fermerets*; ce qui reste de la sphère se compose d'une cinquième calotte, dont la projection horizontale serait un cercle inscrit dans le carré formant le plan de la voûte; plus quatre parties triangulaires (*rsr*, *r's'r'*) comprises entre les calottes, et que l'on nomme *pendentifs*.

L'appareil des murs et de la partie supérieure de la voûte ne présente aucune difficulté après ce que l'on a dit plus haut. Nous n'avons donc à nous occuper que des pierres qui appartiennent en même temps à la sphère et aux fermerets.

Si nous prenons pour exemple la deuxième pierre du pendentif (*fig.* 358, 359), la douelle se compose de la partie de sphère (*aeea*, *a'e'e'a'*) plus des deux petites faces plates (*anpe*) (*anpe*) : l'arête du joint supérieur est formée par les deux droites horizontales *na*, *an*, dans le plan des fermerets, et par l'arc de cercle *aa* situé dans la sphère. Or, la portion du joint correspondant à cet arc sera une surface conique *aavv*, ayant son sommet au centre de la sphère, tandis que pour les parties qui appartiennent aux fermerets, les joints doivent être des plans horizontaux. On raccordera ces deux faces de joints par un petit plan oblique *avx*, contenant : 1° la ligne *av* perpendiculaire à la sphère ; 2° la ligne *ax* perpendiculaire au plan vertical du fermeret.

La figure 360 fera comprendre facilement la forme de cet appareil, dont l'effet à l'extérieur de la voûte est représenté *fig.* 363.

On pourrait aussi tailler cette pierre, comme on le voit *fig.* 361 ; on ferait alors usage de pierres moins épaisses, et par conséquent il y aurait moins de déchet.

La pierre 362 est une des deux qui se posent sur la précédente.

Taille. Supposons, par exemple, que l'on veuille tailler la pierre (*fig.* 360) ; on dressera d'abord le lit horizontal ; puis on taillera les faces verticales extérieures et les faces inté-

rieures des fermerets, seulement jusqu'au cylindre vertical, contenant l'arc *aa*, que l'on tracera ; puis on prolongera les plans des fermerets jusqu'à ce qu'on puisse y tracer les deux arcs *ae ;* enfin on décrira l'arc *ee* dans le plan inférieur, ce qui déterminera le contour de la douelle que l'on taillera avec une cerce découpée sur la courbure de l'un des grands cercles de la sphère. On tracera ensuite l'arc *vv :* cet arc et l'arc *aa* serviront de directrices au joint conique supérieur ; enfin on refouillera la pierre pour tracer l'arc horizontal *uu :* cet arc et l'arc *ee* seront les directrices du joint inférieur, et le reste ne présentera plus de difficultés.

422. Des combinaisons analogues seront employées dans la voûte projetée (*fig.* 364, 365).

La figure 370 représente l'appareil vu de l'extérieur.

II.

423. **Voûte en pendentif avec lunettes droites.** — Il arrive souvent, dans les voûtes en pendentif, que l'on remplace les fermerets par des arcs doubleaux, formant les ouvertures des galeries qui aboutissent à la voûte. Dans ce cas, l'appareil se dispose avec autant de simplicité que d'élégance.

En jetant un coup d'œil sur les figures 373, 374, 377, *Pl.* 41, on concevra facilement la forme des pierres, et la construction de l'épure ne présentera aucune difficulté.

La douelle de la pierre 374 se compose de deux petits plans appartenant aux arcs doubleaux, et d'une portion

de la surface sphérique terminée par huit arcs de cercle, savoir :

1° Les deux arcs provenant de l'intersection de la sphère par les plans verticaux des arcs doubleaux ;

2° Deux arcs horizontaux servant de directrices aux joints de la voûte sphérique ;

3° Quatre arcs inclinés provenant de l'intersection de la sphère par les plans de joints des berceaux.

Ces plans, passant par le centre de la sphère, couperont les joints coniques suivant des lignes droites.

Les deux systèmes d'appareils examinés précédemment sont représentés par les figures 371, 375 ; les panneaux de joints sont rabattus (*fig.* 372 et 376).

Si les pierres 374, 377, étaient trop fortes, on les partagerait par un joint vertical en deux parties symétriques (*fig.* 378).

Taille. On préparera les voussoirs des pendentifs sur leurs projections horizontales, puis on fera les plans de joints des berceaux, sur lesquels on appliquera les panneaux 372, 376 ; enfin on fera les petits plans verticaux des arcs doubleaux, et l'on taillera ensuite la douelle de la sphère en opérant comme précédemment.

424. Dans les grandes voûtes sphériques, on ne termine pas les pendentifs en pointe comme nous l'avons fait dans les deux exemples précédents. Cette disposition ne présenterait pas assez de solidité ; dans ce cas (*fig.* 379, 381), on fait les

ouvertures de galeries ou fenêtres moins grandes que le côté du carré inscrit dans le grand cercle de la sphère, d'où il résulte plus de largeur pour les pieds-droits, sur lesquels viennent s'appuyer les parties pendantes de la sphère.

On peut dans ces sortes de voûtes supprimer quelques-unes des assises supérieures que l'on remplace par un vitrage.

CHAPITRE III.

Pénétrations obliques dans la sphère.

I.

425. Berceau pénétrant obliquement dans une voûte sphérique. — Cet exemple, que son irrégularité doit faire éviter, est donné ici comme sujet d'exercice.

Soit (*fig.* 383, *Pl.* **42**) la coupe des pieds-droits par le plan de naissance, et (*fig.* 385) la section droite du berceau qui doit pénétrer dans la sphère. On construira (*fig.* 384) la section de la sphère par un plan méridien parallèle au plan vertical de projection, et l'on déterminera sur les deux figures 385 et 384, l'appareil du berceau et de la sphère, d'après les dimensions des pierres dont on pourra disposer.

On construira (*fig.* 384 et 385) les projections verticales et horizontales des arêtes d'intrados du berceau, puis on déterminera l'arêtier.

Pour y parvenir : supposons, par exemple, que l'on veuille construire les deux projections du point (u, u') suivant lequel la sphère est percée par la seconde arête d'intrados du ber-

ceau. On concevra par cette ligne un plan p parallèle au plan vertical de projection. Ce plan coupera la sphère suivant un cercle vu, dont l'intersection par l'arête du point u fera connaître ce point. Enfin la perpendiculaire abaissée de ce point donnera le point u' ; on déterminera de la même manière tous les autres points de l'arêtier.

Il est essentiel de se rappeler que si le berceau était circulaire et que son axe passât par le centre de la sphère, l'arêtier serait un cercle vertical, et par conséquent sa projection horizontale serait une ligne droite.

Les dispositions d'appareil que nous avons rencontrées dans les divers exemples précédents se retrouveront ici à quelques modifications près. Ainsi les arêtes d'intrados du berceau seront raccordées avec les arêtes de la sphère par des arcs de cercle inclinés et provenant de l'intersection de la sphère par les plans de joint du berceau. Pour déterminer ces courbes on s'y prendra de la manière suivante.

Supposons, par exemple, que l'on veuille construire l'arc zx dont on connaît déjà le point z. Le plan horizontal p', contenant l'arête d'intrados de la sphère, coupera le plan de joint du berceau suivant une droite projetée sur le plan de la figure 385, par le point x'', et sur le plan horizontal de projection (*fig.* 383), par la droite $x'''x'$, dont l'intersection avec l'arête de douelle de la sphère fera connaître x', d'où l'on déduira le point x. On déterminera par le même moyen autant de points que l'on voudra de l'arc zx et des autres arcs analogues ; on peut remarquer de plus que toutes ces courbes passent par le point oo', suivant lequel l'axe du berceau rencontre la surface de la sphère.

426. Il existe encore une différence essentielle entre cet exemple et les lunettes pénétrant dans des berceaux cylindri-

ques : c'est qu'alors, les joints des deux voûtes étant des plans, leurs intersections étaient des lignes droites, tandis qu'ici les joints de la sphère étant des cônes circulaires, leurs intersections par les plans de joint du berceau seront en général des arcs d'hyperbole, et pourraient même, pour certaines inclinaisons, être des arcs de parabole ou d'ellipse.

Les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, sont les sommets de ces hyperboles dont les projections se confondent sur le plan auxiliaire (*fig.* 386) avec les traces des plans de joint, et concourent vers le point o'''. Les génératrices des cônes formant les joints de la sphère concourent en o''.

Pour obtenir des points intermédiaires sur les arcs d'hyperbole dont nous venons de parler, on opérera de la manière suivante.

Un plan horizontal p'' (*fig.* 384, 386) coupera le cône formant le troisième joint de la sphère suivant l'arc de cercle an', décrit du point c comme centre avec un rayon égal à $c''n''$ (*fig.* 386); ce même plan p'' coupera le joint $o'''m''$ du berceau suivant l'horizontal $m''m'$, et le point m', suivant lequel ces deux lignes se coupent, fera partie de la projection horizontale de la courbe cherchée. La verticale $m'm$ déterminera le point m sur la trace verticale du plan p'' (*fig.* 384). On construira de la même manière autant de points que l'on voudra.

La figure 387 contient les douelles et les panneaux de joint dans leurs grandeurs véritables. Les largeurs de ces panneaux sont déduites de la figure 385, et les longueurs résultent de la figure 383.

La figure 388 fait voir la disposition extérieure des deux voûtes.

Taille. On préparera une pierre sur le panneau de projection horizontale A (*fig.* 383) ; puis on tracera dans le cylindre intérieur l'arc horizontal *tx* (*fig.* 389) ; et dans le plan horizontal au-dessous de la pierre, on décrira l'arc horizontal qui passe par le point *u*. Cet arc avec *tx* serviront de directrices à une cerce découpée sur un des grands cercles de la sphère. Dans le plan horizontal supérieur, on tracera l'arc horizontal qui contient le point *w* : cet arc et l'arc *tx* serviront de directrices à l'un des joints coniques. On fera ensuite les plans de joint du berceau ; on tracera *rs*, et l'on refouillera la pierre en dessous pour tracer l'arc horizontal qui avec *rs* doivent servir de directrices au joint conique inférieur ; enfin, les panneaux B,C, (*fig.* 385 et 384), et les panneaux de joint compléteront le tracé de toutes les coupes.

II.

427. **Descente dans une voûte sphérique.** — Nous avons fait voir ailleurs comment en construisant des arcs droits ou arcs doubleaux, on peut éviter les angles aigus provenant de la rencontre de deux berceaux. Aussi ne parlerons-nous de la pénétration directe d'un berceau en descente avec une voûte sphérique, que pour avoir l'occasion d'indiquer une difficulté qui existe dans le raccordement des joints des premières assises.

Si nous supposons que la figure 392, *Pl.* 43, soit la section verticale et en même temps la directrice des diverses surfaces de douelle et de joint d'un berceau incliné pénétrant dans une voûte sphérique et que nous supposions de plus que la pénétration dans la sphère soit un cercle vertical parallèle

au plan de la figure 392, l'arêtier sera projeté par les droites $s-2$, sur les plans des figures 393, 391.

Il arrivera presque toujours que le premier plan de joint de la descente ne rencontrera pas le cercle horizontal cg, formant la première arête de douelle de la voûte sphérique. Ainsi la section de la sphère par ce plan serait un cercle incliné par rapport aux plans de projections, et projeté sur le plan vertical par l'ellipse $1ab$. Dans ce cas, on pourra opérer comme il suit : on choisira à volonté sur le cercle horizontal ce, $c'e'$, un point u,u', que l'on joindra avec le point 1 par un arc de cercle dont le plan incliné, passant par le centre de la sphère, couperait par conséquent le joint conique de cette voûte suivant la droite $uv,u'v'$.

On pourrait ensuite prolonger le plan $1uv$ jusqu'au joint du berceau incliné, mais il sera préférable de construire (*fig.* 395) le plan $1vx$ par le point v,v', et l'arête de douelle du berceau, en terminant le plan de joint du berceau incliné par la droite xz, résultant de son intersection avec le lit horizontal supérieur de la premièse assise de la voûte sphérique. Cette disposition est d'autant plus convenable que la face triangulaire $1vx$ s'approche davantage de la position normale à la descente que ne ferait le plan de joint $1a$.

Une disposition analogue raccordera les joints de la deuxième assise.

Les points uu', mm' (*fig.* 393 et 391), pourront être pris à volonté ; on pourra pour plus de régularité dans l'appareil, faire en sorte qu'ils se trouvent dans un même plan parallèle à l'arêtier qui, dans l'exemple que nous avons choisi, est un cercle vertical ayant pour projections les deux droites $s-2$, $s-2$.

Les figures 394 et 395 font voir les formes des deux premières pierres.

La figure 396 est une descente biaise. Les joints de la descente et de la voûte sphérique se raccorderont comme dans l'exemple précédent, qui ne diffère de celui-ci que par la construction de l'arêtier. Pour obtenir cette courbe, on concevra, parallèlement au plan vertical de projection, un plan qui coupera la descente suivant la droite *au*, et la sphère suivant l'arc de cercle *cu*, et le point *u*,*u'*, provenant de l'intersection de ces deux lignes, sera un point de l'arêtier. On déterminera de la même manière autant de points que l'on voudra.

III.

428. Œil-de-Bœuf, dans une voûte sphérique. — Soient données (*fig.* 397, *Pl.* 44) la section de la voûte sphérique par le plan horizontal de naissance, et (*fig.* 398) la section par un plan vertical contenant l'axe de l'œil-de-bœuf, on prendra pour surface de douelle un cône circulaire ayant son sommet au centre de la sphère, et dont la directrice serait un cercle décrit sur la droite *ac* comme diamètre.

Ce cercle est rabattu sur le plan horizontal (*fig.* 399).

Des projections 398, 399, il sera facile de déduire les ellipses *a'b'c'*, *u'o'v'*, qui sont les projections horizontales des cercles suivant lesquels les surfaces d'intrados et d'extrados de la sphère sont traversées par le cône formant la douelle de l'œil-de-bœuf.

Les plans de joint de la lunette conique, passant par son axe, seront perpendiculaires au plan de la figure 399, et par conséquent se projetteront sur ce plan par des droites

concourant au point s''. Des cercles décrits de ce point s'' comme centre, pourront toujours être considérés comme appartenant à la surface de la sphère, et se projetteraient (*fig.* 398) par des droites telles que tr, parallèles au plan ac. Les intersections de ces cercles par les traces des plans de joint (*fig.* 399), seront ramenées sur la figure 398, et de là, figure 397; ce qui fera connaître les projections elliptiques des arcs de cercle, résultant de l'intersection des surfaces intérieure et extérieure de la voûte sphérique par les joints de la lunette.

Ainsi le cercle projeté (*fig.* 398) par la droite tr, aura pour projection (*fig.* 399) le demi-cercle $t''x''r''$, et le point m'' intersection par le plan de joint $s''d''$ fera connaître le point m (*fig.* 398).

Taille de la pierre. Si nous prenons pour exemple la pierre dont la douelle est désignée par la lettre A (*fig.* 398), sa surface se compose :

1° Des surfaces sphériques formant l'intrados et l'extrados de la voûte;

2° De trois surfaces coniques, savoir : la douelle de l'œil-de-bœuf et les deux joints horizontaux de la voûte sphérique;

3° Enfin de trois plans, savoir : les deux joints de la lunette, et le joint vertical de la voûte sphérique.

Toutes ces surfaces passent par le centre de la sphère, et de plus, dans l'exemple proposé, elles sont partout équidistantes, puisque les deux surfaces sphériques d'intrados et d'extrados de la voûte sont concentriques. On déterminera les polygones B′,C′, suivant lesquels les surfaces de joint suffisamment prolongées sont coupées par les deux plans parallèles ac, pq, entre lesquels la pierre se trouve comprise; puis,

après avoir projeté le panneau CC′ sur le plan de l'autre panneau BB′, on les rabattra tous les deux (*fig.* 399).

Pour tailler le voussoir, on dressera d'abord le plan de joint qui contient l'arête *i″e″* (*fig.* 399). On fera ensuite deux autres plans perpendiculaires au premier à une distance égale à celles des plans *ac*, *pq* (*fig.* 398). On appliquera sur ces plans les deux panneaux B″, C″ en se repérant sur les points *i″e″*, dont il faudra d'abord déterminer la position avec soin. En abattant la pierre tout autour de ces panneaux, on aura la pierre représentée (*fig.* 400); enfin on appliquera sur les faces de ce solide un panneau flexible découpé sur l'espace compris entre deux grands cercles des sphères d'intrados et d'extrados, ce qui déterminera les directrices des surfaces intérieure et extérieure que l'on taillera comme précédemment.

IV.

429. **Niche sphérique.** — Les figures 402 et 403 représentent l'appareil d'une niche sphérique pratiquée dans un mur droit. Cet exemple ne présente pas assez de difficultés pour arrêter le lecteur.

La trompe (*fig.* 405 et 406) n'est autre chose qu'une niche sphérique dont on aurait supprimé tout ce qui est en dehors de l'angle formé par les plans des deux murs.

LIVRE V.

CHAPITRE PREMIER.

Voûtes dont l'intrados est une surface de révolution.

I.

436. **Définitions.** — Les figures 408, 411, 413, 414, *Pl.* 45, sont des voûtes dont l'intrados est une surface de révolution. On nomme ainsi (*Géométrie descriptive*) toute surface qui serait engendrée par une courbe tournant autour d'une droite immobile que l'on nomme l'axe de la surface. L'analogie qui existe entre ces voûtes et la sphère nous dispensera d'entrer dans de trop longs détails dont la répétition ne pourrait que fatiguer le lecteur.

Les voûtes de révolution se désignent par la nature de la section méridienne. Ainsi, les figures 408, 409 sont les deux projections d'une voûte *parabolique*, parce que la section méridienne est une parabole.

La figure 411 est une voûte *elliptique surbaissée*.

La figure 413 représente une voûte *annulaire*, et les figures 414 et 415 sont les deux projections d'une *voûte elliptique* dont l'axe est horizontal.

Les joints de ces sortes de voûtes sont des plans méridiens, et des cônes dont les sommets sont situés sur l'axe de la voûte. On doit regarder comme une condition essentielle, que les génératrices de ces cônes soient normales à la surface d'intrados.

Pour tailler la pierre représentée (*fig.* 410), on opérera comme nous l'avons dit (413).

II.

431. **Voûte surhaussée.** — On s'est proposé comme exercice dans l'épure (*fig.* 416, 417) de déduire le voussoir par dérobement, du plus petit bloc qui soit capable de le contenir. La pierre est projetée (*fig.* 416) sur le plan méridien qui la couperait en deux parties symétriques. Il est évident qu'elle est tout entière comprise dans un prisme qui aurait pour base l'hexagone irrégulier *abdceo*, et pour longueur la droite $a'a''$.

On construira les panneaux A, B, C, D, provenant des intersections des surfaces de joint par les plans *ab*, *bd*, *ec*, *eo*. Deux panneaux E ayant une projection unique sont situés dans les plans verticaux $a'c'$, $a''c''$, contenant les bases du prisme. Les droites *vu*, projetées sur le plan horizontal par les points u', u'' résultent des intersections des plans $a'c'$, $a''c''$ par les plans méridiens $u's'$, $u''s''$; la petite courbe *xu* est la projection verticale de deux arcs d'hyperbole provenant de l'intersection du

joint conique inférieur par les plans $a'c'$, $a''c''$; enfin les panneaux F, H sont les développements des surfaces de cône formant les joints de la voûte proposée. On commencera par tailler le prisme *abdceo*, puis on appliquera les panneaux A, B, C, D, E, chacun sur la face qui lui correspond; les contours de ces panneaux seront les directrices des plans méridiens et des surfaces de joint coniques, que l'on taillera, et dans lesquels on appliquera les panneaux de développement F et H, dont les contours serviront à diriger le mouvement de cerces découpées sur les sections méridiennes intérieure et extérieure de la voûte. On aura le soin, en faisant mouvoir ces cerces, de les maintenir dans la direction des plans méridiens.

CHAPITRE II.

Pénétrations.

I.

432. Descente pénétrant dans une voûte annulaire. — Pour deuxième étude des surfaces de révolution, nous construirons la pénétration d'une voûte annulaire par un berceau incliné ou descente.

Nous supposerons de plus que l'axe de la descente ne rencontre pas celui de la voûte, et que le mur extérieur du monument est en talus.

Les données sont :

1° *Fig.* 1 et 4, *Pl.* 46, la section méridienne A de la voûte annulaire ;

2° *Fig.* 3, la projection horizontale de l'espace à couvrir ;

3° *Fig.* 2, la section droite D du cylindre formant l'intrados de la descente ;

4° L'inclinaison du berceau est déterminée par l'un des angles $5ac$, $5'ac$ (*fig.* 1 et 4).

Construction de l'épure. Pour éviter la confusion, nous adopterons la disposition de la planche 26, et nous ferons

une projection particulière pour chacun des deux arêtiers de la descente.

Arête de pénétration des deux voûtes. Le point *a* de la projection horizontale étant projeté sur la ligne de naissance de la voûte annulaire (*fig.* 1 et 4), on construira les droites *ac*, qui sont les traces verticales du plan de naissance du berceau rampant.

La ligne *cd*, perpendiculaire sur *ac*, sera la trace verticale du plan de la section droite, que l'on rabattra sur l'épure en la faisant tourner autour de l'horizontale projetante du point *c*.

Tous les points de la figure 2 étant projetés sur *cd'* et ramenés de là sur *cd*, détermineront toutes les arêtes de douelles et de joints de la descente.

Pour construire les points où ces lignes pénètrent la douelle de la surface annulaire, on opérera de la manière suivante :

La section méridienne A étant divisée en voussoirs, on projettera (*fig.* 3) les points 0, 1, 2, 3 sur la droite *oC* qui est la trace du méridien principal, et les cercles 0 — 0″, 1′ — 1″, 2′ — 2″, décrits du point C comme centre avec les rayons C — 0, C — 1′, C — 2′, seront les projections horizontales des arêtes d'intrados de la voûte annulaire.

Tous ces cercles sont coupés par le plan vertical *pp* qui contient l'arête *xx* de la descente suivant la courbe *p'p'* (*fig.* 1), et l'intersection de cette ligne par la droite *xx* donnera le point *x* qui appartient à l'arête de pénétration des deux voûtes.

Tous les autres points de cette courbe s'obtiendront de la même manière.

La projection horizontale se déduira de la projection verticale.

On déterminera pareillement les points suivant lesquels la voûte serait percée par autant de droites que l'on voudra, parallèles à la descente et situées dans les plans de joint $x—x'$, $z—z'$ (*fig.* 2).

Cette opération déterminera les courbes xy', zz', vv', (*fig.* 1 et 2), et les courbes uu', vv' (*fig.* 2 et 3).

Des constructions analogues donneront les courbes suivant lesquelles la douelle de la descente et les joints de cette voûte pénètrent dans la surface conique formant le parement en talus du pied-droit de la voûte annulaire.

Ainsi, par exemple, les arcs $5'—5''$, $6'—6''$ ayant été prolongés jusque dans le vide de la descente, les intersections de ces cercles par les plans pp, ont donné la courbe $p''p''$, qui est un arc d'hyperbole; et le point x, suivant lequel cette courbe est rencontrée par la droite xx, appartient à l'arête de pénétration de la descente dans le parement extérieur du mur en talus.

On a construit de la même manière les courbes provenant de la pénétration des plans de joint de la descente dans la face extérieure du mur.

Du côté de la figure 4, on a été obligé de baisser les lignes d'assises horizontales, parce qu'elles auraient été rencontrées trop loin par les plans de joint de la descente, si on eût laissé les lits à la hauteur des points 7 et 8.

433. Ces raccordements d'assises sont une des difficultés que l'on rencontre le plus fréquemment. Nous avons déjà reconnu que cette partie de la question n'est pas de nature à être résolue d'une manière générale.

On peut bien dire en effet qu'il faut autant que possible éviter les angles aigus, les joints courbes, les crossettes ; mais cela n'est qu'une solution négative, et l'énoncé des inconvénients qu'il faut éviter ne donne pas les moyens de parvenir à ce but.

On conçoit que le choix des coupes qui remplissent le mieux toutes les conditions d'économie et de stabilité ne dépend pas seulement des rapports qui existent entre les dimensions des deux voûtes combinées, mais encore de l'inclinaison plus ou moins grande de la descente, ainsi que de la grandeur, et par conséquent du nombre des pierres dont on peut disposer.

C'est pour habituer le lecteur à vaincre ces difficultés que nous avons souvent choisi des combinaisons que l'on doit au contraire éviter dans les applications.

D'un autre côté le grand nombre de lignes nécessaires à l'explication des principes et le peu d'étendue des feuilles sur lesquelles on dessine, engagent à supposer dans les épures d'études un nombre de voussoirs bien inférieur à celui qui entre ordinairement dans la composition d'une voûte. D'où il résulte que, dans la pratique les joints étant plus rapprochés, il y a beaucoup moins de difficultés pour le raccordement des pierres.

Pour mieux faire comprendre la forme des pierres principales, j'en ai dessiné quelques-unes en perspective (*Pl.* 47).

Les figures 5, 6, 8 et 9 sont les pierres de la première assise, du pied-droit qui est projeté (*fig.* 1re, *Pl.* 46).

La similitude des lettres fera facilement reconnaître les lignes qui se correspondent.

434. On rencontrera dans la première pierre (*fig.* 1) une difficulté analogue à celle dont nous avons parlé au n° 427. La courbe xy' provenant de l'intersection de la voûte annulaire, par le plan de joint xx' (*fig.* 2, *Pl.* 46) ne rencontre pas le cercle horizontal 1—1 (*fig.* 1). On pourra, dans ce cas, faire une petite coupe verticale eo, ou bien, comme nous l'avons fait ici, remplacer le plan de joint xxy' par un autre xxe, qui serait différent du plan normal xx' (*fig.* 2), et qui serait déterminé par l'arête de douelle xx et par le point e pris à volonté sur le cercle horizontal 1—1.

La face $nnem$ (*fig.* 1 et 3), qui forme le dessus de la première pierre, coupe le joint conique de la voûte annulaire suivant la ligne em. Cette ligne est droite dans l'exemple qui nous occupe, parce que le plan xxe a été choisi de manière à contenir le point s sommet du cône, engendré par la droite g—1.

Pour obtenir ce résultat, il suffit de prolonger cette droite jusqu'à sa rencontre avec l'axe de la voûte principale, et de construire par le point s le plan sem parallèle à l'arête xx, ce qui détermine le point m et la trace verticale en du plan $nnem$.

Le plan de joint xxe n'a pas été prolongé jusqu'au parement extérieur du mur. On a préféré faire la petite face triangulaire $xe'h$ (*fig.* 3 et 1).

Le point c' provient de l'intersection du plan horizontal $e'h$ (*fig.* 1) par la droite ee'.

La droite $e'h$ est perpendiculaire à l'arc h — $7''$ (*fig.* 3).

La seconde pierre n'offrira pas de difficulté.

La courbe $z'z''$ (*fig.* 1 et 3) provient de l'intersection du second joint conique de la voûte principale par le deuxième plan de joint de la descente.

Le petit triangle $r'r''z''$ (*fig.* 1) est vertical et déterminé par la droite $r'''z'''$ (*fig.* 3) perpendiculaire à l'arc de cercle z'' — $8''$.

La courbe zz''' est l'intersection du parement extérieur du mur par le deuxième plan de joint de la descente, et la droite $r'z'''$ (*fid.* 1) résulte de la section de ce même plan par celui du petit triangle $r'r''z'''$.

Du côté de la figure 4, le premier joint est formé par le plan de naissance de la descente. Ce plan coupe la voûte annulaire suivant la courbe t—t'.

La droite t—i (*fig.* 3) est la trace du plan vertical qui contient la petite face $t'i'i''$ (*fig.* 11, *Pl.* 47).

La figure 7, *Pl.* 47, contient le développement des panneaux de douelle et de joints.

Les largeurs de ces panneaux sont déduites de la section droite rabattue (*fig.* 2, *Pl.* 46), et les longueurs sont données par les figures 1 et 4.

Taille de la pierre. On pourra préparer la pierre sur le panneau B′ de projection horizontale (*fig.* 3).

Ce qui déterminera :

1° Le cylindre vertical qui contient l'arc de cercle $1''' - e$.

2° Le plan vertical contenant l'arête xx.

3° Enfin le plan méridien ($1'''-q$).

Cela étant fait, on portera le panneau de section méridienne $01g65$ (*fig.* 1) sur la face verticale $1'''-q$, ce qui déterminera les points 0, $1'''$, m' (*fig.* 10, *Pl.* 47).

On tracera les deux arcs de cercle oa, $1'''e$, le premier dans le plan horizontal qui forme le dessous de la pierre, et le second avec une règle flexible dans le cylindre vertical $1'''e'''$ $1^{\text{IV}}e^{\text{IV}}$.

Ces deux arcs serviront à diriger le mouvement d'une cerce découpée sur la section méridienne de la voûte ; on marquera des points de repère sur les deux arcs $1'''e'''$, oa, et l'on maintiendra le plan de la cerce perpendiculaire à l'intrados.

Quand la surface annulaire sera taillée, on tracera les arcs ee''', ww, ea, donnés par leurs projections horizontales (*fig.* 3), on tracera ensuite l'arête xx', dont la hauteur et l'inclinaison sont données par la fig. 1, et l'on fera le plan $nnx'a'''$ perpendiculaire sur xx'.

Enfin le panneau D' (*fig.* 2, *Pl.* 46) étant appliqué sur le plan $nnx'a'''$, les arcs xe, $x'a''$ (*fig.* 10, *Pl.* 47) serviront de directrices au cylindre incliné formant l'intrados de la descente.

Pour les voussoirs supérieurs, il sera plus économique de préparer la pierre sur le panneau de projection verticale.

Ainsi, par exemple, pour tailler la pierre qui correspond au panneau D'' (*fig.* 2, *Pl.* 46) :

On découpera le panneau $k8'bv'l$ (*fig.* 4) en ayant soin de réserver les faces bv', $v'l$, $k8'$.

La pierre étant taillée d'après le contour de ce panneau, on lui donnera pour épaisseur la droite $v3''$ (*fig.* 3), qui est la différence des distances entre le point le plus près et le plus éloigné du plan vertical.

Cela étant fait, on appliquera le panneau D'' (*fig.* 2), sur les deux faces $k8'$, lv', ce qui déterminera la douelle et les deux plans de joints de la descente.

On pourra tailler le plan de joint supérieur dans toute l'étendue de la pierre.

Mais pour le plan de joint inférieur, il faudra ne procéder qu'avec précaution et refouiller la pierre, seulement jusqu'à ce qu'on puisse appliquer le panneau $uuu'u'''$ (*fig.* 7, *Pl.* 47).

La droite $3''æ$ (*fig.* 3, *Pl.* 46) étant tracée dans le plan horizontal $b8$ (*fig.* 4), déterminera le plan de section méridienne sur lequel on appliquera le panneau correspondant.

L'arc $3'v'$ (*fig.* 3) étant tracé dans le plan horizontal $b8$, on taillera avec un beuveau rectangulaire le cylindre vertical qui doit contenir l'arc de cercle $v'3''$.

Par suite de cette opération, on aura tracé toutes les courbes qui doivent former le contour de la douelle appartenant à la voûte annulaire.

Cette surface se taillera, comme nous avons dit plus haut, à l'aide d'une cerce découpée sur la section méridienne, et

que l'on fera passer par les points de repère que l'on aura le soin de marquer sur le contour des panneaux.

Pour tailler le parement extérieur du mur, on tracera l'arc 8'8' (*fig.* 3) dans le plan horizonial *b*8, et l'on fera usage du beuveau M (*fig.* 1) qui donne l'angle que la droite 5—8, génératrice de la surface conique du talus, fait avec le plan horizontal.

Il faudra seulement avoir soin de maintenir toujours le plan de ce beuveau perpendiculaire à l'arc horizontal 8'—8'.

CHAPITRE III.

Voûte elliptique.

I.

435. **Voûte elliptique appareillée par assises horizontales.** — Quoique l'appareil représenté (*fig.* 414 et 415, *Pl.* 45) soit une conséquence naturelle de la forme de l'intrados, on préfère, dans les grandes voûtes elliptiques, disposer les rangs de voussoirs par assises horizontales; mais alors on éprouve quelques difficultés pour éviter les angles aigus.

Soit (*fig.* 418, *Pl.* **48**) la section de la voûte par un plan vertical passant par le centre, et perpendiculaire à l'axe de l'ellipsoïde de révolution qui forme la surface d'intrados. Nous supposerons que la calotte formant l'extrados appartient à une seconde surface ellipsoïde, que l'on peut toujours prendre semblable à la première, mais dont le centre serait situé au-dessous du plan de naissance, afin de satisfaire aux conditions de stabilité énoncées (282); enfin le mur d'enceinte supportant la voûte serait compris entre deux cylindres, à bases elliptiques semblables et concentriques, déterminés par

les dimensions de la voûte que l'on se propose d'exécuter. Nous remarquerons que, par suite de la similitude de ces deux ellipses, le mur formant pied-droit sera plus épais vers les extrémités du grand axe, ce qui est d'autant plus convenable que dans ces sortes de voûtes la poussée est plus grande dans le sens de la longueur.

Ces premières données étant adoptées, on partagera l'arc *ab* en autant de parties que l'on voudra de rangs de voussoirs, et l'on concevra un plan horizontal par chaque point de division. Tous ces plans couperont la surface de douelle suivant une suite d'ellipses horizontales, et semblables entre elles, que l'on prendra pour arêtes et pour directrices des surfaces de joints. La première idée qui se présente est de former ces joints par des cônes ayant leurs sommets au centre même de la voûte, mais il est évident que les génératrices de ces cônes ne seraient normales à la surface d'intrados que dans le plan du cercle *ab*, et feraient, au contraire, des angles très-inégaux avec la section par un plan vertical qui contiendrait le grand axe. On a proposé divers moyens d'obvier à cet inconvénient, mais aucun ne me paraît aussi simple pour la pratique que celui que je vais indiquer.

Prenons pour exemple le joint correspondant à la deuxième arête de douelle. Le point m'' étant ramené dans le plan du cercle *ab* en tournant autour de la verticale qui contient le centre de la voûte, on construira les deux droites *sn* tangentes en *n*, et *sm* tangente en *m*; on partagera l'angle *msn* en deux parties égales par une droite *su*, qui, ramenée dans le plan *pq*, serait tangente à la voûte au point u'' situé sur l'ellipse $m''n'$, de sorte que la droite *ux*, perpendiculaire à *su*, serait normale en u'' à la section de la voûte par le plan vertical *pq*. Or, si l'on prend cette droite pour génératrice d'un cône qui aurait son sommet au point 2, il est évident que la sur-

face de ce cône pourra, sans aucun inconvénient, être prise pour joint de la voûte, car les angles *snk*, *smh*, que cette surface ferait avec la douelle aux deux extrémités du petit et du grand axe, différeront assez peu de l'angle droit, pour qu'il n'y ait aucun inconvénient à les adopter. A l'extrême simplicité de cette combinaison il faut joindre encore cet avantage que l'arête de l'extrados sera une ellipse horizontale, et semblable à l'arête d'intrados. Les autres joints horizontaux seront déterminés de la même manière; ainsi, dans l'exemple qui nous occupe, les surfaces de joints seront quatre cônes dont les sommets seraient situés aux points 1.2.3.4. sur la verticale du centre.

Une autre difficulté existe dans la disposition des joints verticaux. Si la différence des deux axes n'était pas trop grande, on pourrait faire ces coupes par des plans verticaux contenant le centre; mais lorsque la voûte sera très-allongée, il sera préférable de faire les joints montants perpendiculaires à l'ellipse moyenne de chaque douelle. Dans ce cas, les lignes *or*, *ce* (*fig.* 420) provenant de l'intersection de ces plans de joints avec les surfaces coniques, qui forment les joints horizontaux, seront des arcs d'hyperbole. Pour construire des points intermédiaires de ces courbes, le point *d*, par exemple, on concevra un plan horizontal *gl* qui coupera le joint conique suivant l'ellipse horizontale *g'l'*, semblable à l'arête de douelle, et l'intersection de cette ellipse par la trace du plan de joint déterminera le point *d'*, et par conséquent le point *d*. On agira de la même manière pour toutes les courbes analogues.

Ainsi, de ces deux conditions réunies, que l'extrados soit semblable à l'intrados, et que les joints soient des surfaces coniques ayant pour directrices les sections horizontales de la voûte, il résulte cette conséquence remarquable, que toutes

les sections des joints et des surfaces intérieures et extérieures de la voûte par des plans horizontaux sont des ellipses semblables, ce qui rend les constructions de l'épure et le tracé de la pierre extrêmement simples.

Les figures 420 et 421 sont les deux projections d'une pierre.

La figure 422 contient les panneaux de joints verticaux que l'on suppose rabattus, le premier en tournant autour de la verticale du point α, et le second autour de celle du point ω.

436. Si la voûte était très-allongée, on pourrait faire les joints par plusieurs surfaces coniques, dont les sommets seraient situés au point où la verticale du centre serait rencontrée par les normales des points m', u', n' (*fig.* 424 et 425).

Taille (*fig.* 423). On préparera une pierre sur le panneau de projection horizontale $o'z'i'c'$ (*fig.* 421), et l'on appliquera les deux panneaux verticaux *vzro*, *tiec* (*fig.* 422) sur les faces correspondantes. Ensuite, avec une règle flexible, on tracera les deux arcs *zi*, *oc* dans les cylindres concave et convexe de la pierre; puis, ~~avec des~~ cerces découpées sur la projection horizontale, on décrira les arcs d'ellipse *tv*, *er*; ce qui déterminera toutes les coupes.

Les surfaces de joints se tailleront en faisant glisser une règle sur les points de repère des courbes *tv*, *iz*, *er*, *oc*, et les surfaces d'intrados et d'extrados seront suffisamment déterminées par les six cerces découpées sur les côtés convexes et concaves des panneaux rabattus (*fig.* 422); on fera glisser les cerces intérieures sur les arcs *zi*, *re*, et les cerces extérieures sur les arcs *vt*, *oc*, en faisant coïncider les points de

repère, et maintenant le plan de chaque cerce perpendiculaire aux ellipses moyennes.

Les contours des panneaux *vzro*, *tiec*, étant tracés sur les faces extrêmes de la pierre, il suffira d'une cerce intermédiaire (*fig.* 428) découpée sur le contour du panneau provenant de la section par le plan *fy* (*fig.* 421) : la cerce concave servira pour l'extrados.

On pourrait aussi tailler la douelle et l'extrados avec des cerces découpées sur les sections méridiennes des ellipsoïdes intérieures et extérieures. Il faudrait alors marquer sur les contours des panneaux, les points de repère résultant de leur section par les plans méridiens des deux ellipsoïdes, et maintenir avec soin les cerces dans ces plans. Ce qui serait plus difficile que la méthode précédente.

LIVRE VI.

SURFACES RÉGLÉES.

CHAPITRE PREMIER.

Joints de la voûte elliptique.

I.

437. **Définitions.** — On donne le nom de surface réglée (*Géométrie descriptive*) à celle qui contient les positions successives d'une ligne droite assujettie à se mouvoir suivant des conditions données. L'énoncé de ces conditions forme la définition de la surface. Les surfaces cylindriques et coniques sont des cas particuliers de surfaces réglées.

On peut employer plusieurs espèces de surfaces réglées pour joints de la voûte elliptique appareillée par assises horizontales.

II.

438. **Première surface de joint.** — Les données étant supposées les mêmes que dans l'épure précédente, et le point *o* (*fig.* 429, 431, *Pl.* **49**) étant la projection verticale du centre de l'ellipsoïde formant l'extrados de la voûte, concevons (*fig.* 430) une suite de plans verticaux passant par le centre; les sections de l'intrados, par tous ces plans, seront des ellipses de même hauteur; et les tangentes aux points 1, 2, 3, 4, 5, etc., concourront en un point *s*, situé sur la verticale du centre; toutes ces tangentes étant rabattues sur le plan vertical (*fig.* 429), on construira leurs normales, que l'on fera ensuite revenir à leurs places en remarquant que, dans ce mouvement, les points *c*, *c'*, *c''*, *c'''*, etc., suivant lesquels ces normales rencontrent la verticale du centre, resteront immobiles. La surface réglée qui contiendra toutes ces normales pourra servir de joint à la voûte elliptique.

Pour construire l'intersection de cette surface avec l'extrados de la voûte, on remarquera que le plan vertical *cp* qui contient le point 4 coupe l'ellipsoïde extérieure suivant une ellipse ayant pour demi-axe horizontal la droite C*v*, et pour demi-axe vertical la droite *oh*. Au lieu de construire la projection de cette ellipse, on peut la rabattre en *v''u''h* en la faisant tourner autour de la verticale du centre, et le point *u''* résultant de l'intersection par la normale du point 4, étant projeté sur C*x'''* et ramené de là dans le plan vertical *cp*, ferait connaître *u'*, et par suite le point *u* (*fig.* 429) On déterminera de le même manière autant de points que l'on voudra de la courbe *a'u'e'*.

Il n'est pas nécessaire de construire entièrement l'ellipse $v''u''h$; on peut, connaissant les demi-axes ov'' et oh, se contenter de construire le petit arc qui coupe la normale en u''.

III.

439. **Deuxième surface de joint.** — La surface que nous venons de construire n'est pas tout à fait normale à la voûte. En effet, les droites génératrices de cette surface sont bien perpendiculaires aux sections verticales passant par le centre, mais elles ne sont pas perpendiculaires aux tangentes horizontales passant par les points 1, 2, 3, 4, 5, etc.

Or, si l'on veut satisfaire à cette condition, il faudra opérer de la manière suivante.

On construira (*fig.* 432) les normales à l'ellipse représentant la projection horizontale de l'arête de douelle. Ces lignes perpendiculaires aux tangentes de la courbe seront les projections horizontales des normales à la voûte. Les projections verticales de ces mêmes normales devront concourir vers le point c, puisque l'on sait (*Géométrie descriptive*) que les normales à une surface de révolution rencontrent toujours son axe.

Les projections verticales et horizontales des normales, étant construites (*fig.* 431 et 432), la surface qui les contient sera elle-même normale et pourra servir de joint à la voûte. Il ne restera plus qu'à construire l'arête d'extrados.

Pour cela, concevons (*fig.* 431) un plan cq perpendicu-

laire au plan vertiral de projection. Ce plan, qui contient la normale du point 8, coupera l'ellipsoïde d'extrados suivant une ellipse $t'z'x'n'$, dont le centre ll' s'obtiendra en abaissant sur le plan cq la perpendiculaire ol. De plus, le point t abaissé sur Cd sera l'extrémité du petit axe $l't'$. Enfin, le point x'' rabattu (*fig.* 429) étant projeté en x''' et ramené en x' est situé en même temps dans le plan cq et dans l'extrados de la voûte. Ainsi l'on aura le centre l', le petit axe $l't'$ et un point x' de l'ellipse $t'z'x'n'$ qui représente la projection horizontale de la section de l'extrados par le plan cq; il sera donc facile de construire cette courbe ou seulement la portion de cette courbe qui coupe la normale du point 8, ce qui fera connaître le point z, z' appartenant à l'arête d'extrados. On opérera de même pour les autres points.

L'horizontale du point l perce l'ellipsoïde en un point qui, rabattu en nn'' et ramené en n', serait l'extrémité du grand axe de l'ellipse $t'x'z'n'$; mais nous venons de voir que l'on pouvait se passer de ce point.

Au lieu de projeter l'ellipse tzn', on aurait pu la rabattre en la faisant tourner autour de l'axe de l'ellipsoïde d'intrados : dans ce rabattement le centre l vient se placer en l'', et la normale du point 8 devient $8z''$; le point z'' étant obtenu, on en déduit facilement z'.

IV.

440. **Troisième surface de joint.** — Les deux surfaces réglées que nous venons de construire rencontrent l'extrados de la voûte suivant des courbes à double courbure. On peut

éviter cette irrégularité en adoptant une surface réglée, dont les génératrices s'appuieraient sur deux ellipses horizontales et semblables 9—*u*, *bm*, situées l'une dans l'intrados et l'autre dans l'extrados de la voûte. La seconde de ces deux ellipses passerait par le point *zz'''*, suivant lequel la normale du point 10 perce l'extrados, et les projections horizontales des génératrices seraient normales à l'ellipse 9—10—11. Les projections verticales de ces mêmes génératrices se déduisent facilement de ce qui vient d'être dit. Pour éviter la confusion, ces dernières lignes ne sont tracées qu'en points sur la figure 431.

La surface dont nous venons de parler s'abaisse un peu au-dessous de la surface normale, vers l'extrémité du grand axe, tandis qu'au contraire elle se relève en s'approchant de l'extrémité du petit axe, et ces deux surfaces se coupent suivant la normale du point 10.

La surface actuelle, ainsi que les joints coniques proposés planche 48, jouissent de cet avantage, que les arêtes de douelle et d'extrados sont des courbes planes et horizontales; ce qui facilite beaucoup le tracé des voussoirs, et doit faire préférer dans la pratique ces surfaces à celles représentées figures 430, 432, qui ne sont indiquées ici que comme sujets d'étude.

V.

441. **Quatrième surface de joint.** — On pourrait encore se proposer d'employer pour joint de la voûte elliptique une surface développable que l'on construirait de la manière suivante. On déterminera d'abord (*fig.* 434) un certain

nombre de normales, 1.w', 13.i', 12.k', 11.f', ainsi que les tangentes horizontales aux points 1.13.12.11. Ensuite, on fera passer un plan par la tangente du point 1 et la normale 1.w'; un second plan par la tangente du point 13 et la normale 13, i'; un troisième plan par la tangente du point 12 et la normale 12, k', etc. Les intersections successives de tous ces plans seront les génératrices d'une surface réglée développable, tangente à la surface normale dans toute l'étendue de l'ellipse 1.13.12.11.

Il est inutile d'ajouter que les points 1.13.12.11 doivent être assez rapprochés les uns des autres pour que le polygone formé par les tangentes horizontales puisse remplacer, sans erreur sensible, l'ellipse 1.13.12.11. Je n'entrerai pas ici dans de plus grands détails au sujet de cette surface, qui est moins simple dans l'exécution que celles indiquées précédemment, et qui n'est indiquée ici que comme sujet d'exercice.

CHAPITRE II.

Conoïdes.

I.

442. Définitions. — La surface réglée formant la douelle de la voûte (*fig.* 435 et 436, *Pl.* **50**) a pour directrices : 1° la droite verticale *as* projetée sur le point horizontal par le point *a'*; 2° le demi-cercle vertical *vou*, *v'o'u'*; enfin, pour troisième condition, la génératrice doit, dans son mouvement, rester toujours parallèle au plan horizontal. On sait (*Géométrie descriptive*) que les surfaces de ce genre se désignent par le nom de conoïdes.

Au lieu du demi-cercle *vou*, *v'o'u'*, on aurait pu prendre pour directrice tout autre courbe plane ou à double courbure; mais dans le cas des données actuelles, il est essentiel de remarquer que toutes les sections de la douelle par des plans parallèles au plan vertical de projection seront des ellipses ayant une hauteur commune égale à *ao*, et pour axe horizontal une distance égale à l'écartement des pieds-droits, à l'endroit où serait faite la section.

443. Dans les figures **435** et **436**, on suppose que la voûte conoïde traverse un mur droit, et dans les figures **437** et **438**

la même surface pénètre dans un mur en tour ronde. Nous allons commencer par la première de ces deux voûtes.

Épure. On construira, sur la figure 435, un certain nombre de parallèles au plan de naissance. Ces droites rencontreront le demi-cercle *vou* en des points que l'on abaissera sur *v'u'*, et qui, étant joints avec *a'*, détermineront les projections horizontales des génératrices de la voûte conoïde. Ces dernières rencontrent les plans verticaux *m'e'*, *n'd'*, en des points que l'on relèvera (*fig.* 435) sur les génératrices correspondantes de la douelle, ce qui déterminera les deux ellipses *m*,1.0—*n*.5.0, provenant de la pénétration de la voûte dans les deux faces verticales du mur.

On construirait de la même manière (*fig.* 437, 438) les deux courbes à double courbure, o1*x*, o5*z*, suivant lesquelles la surface de douelle pénètre dans les deux cylindres concentriques qui comprennent le mur rond. En effet, ces deux cylindres étant verticaux sont les surfaces projetantes des courbes de pénétration, de sorte qu'il suffit de relever les points suivant lesquels les traces *e'x'*, *d'z'* de ces cylindres sont rencontrées par les projections horizontales des génératrices de la voûte conoïde.

II.

444. Surfaces de joints. — Je suppose qu'il s'agisse du joint correspondant à l'arête 1.5 (*fig.* 435, 436). Les sections de la douelle par des plans parallèles au plan vertical de projection étant, comme nous l'avons dit plus haut, des ellipses de même hauteur, il en résulte que les tangentes à ces courbes, aux divers points de l'horizontale 1.5, rencon-

treront à la même hauteur les axes verticaux de ces ellipses, et par conséquent les projections verticales de ces tangentes concourront au point *s*, que l'on déterminera en construisant d'abord la droite 3*s*, tangente au demi-cercle *vou*; les droites 1—1, 2—2, 3—3, etc., perpendiculaires aux tangentes *s*1, *s*2, *s*3, etc., seront donc normales aux sections de l'intrados par des plans parallèles au plan vertical de projection, et la surface réglée, qui contiendra toutes ces normales, pourra être prise pour surface de joint de la voûte. L'intersection de cette surface réglée par le lit supérieur de la première pierre, sera un arc d'hyperbole que l'on obtiendra en abaissant des perpendiculaires par les points où les projections verticales des normales sont coupées par le plan horizontal supérieur de la pierre. Cette hyperbole a pour asymptote les droites *a'*.1, *a'*.7.

Les deux parements verticaux du mur couperont la surface de joint suivant les droites 1—1, 5—5, normales aux deux ellipses *m*10, *n*50; ce qui produira, dans l'appareil extérieur, un effet convenable.

445. La surface que nous venons de construire n'est pas tout à fait normale à la douelle. En effet, pour satisfaire à cette condition, il faudrait que chaque génératrice fût normale, non-seulement aux sections verticales de la voûte, mais encore à l'arête de douelle 1.5. Pour obtenir ce résultat, on opérera de la manière suivante :

La tangente *s*1 (*fig.* 437), que l'on déterminera comme précédemment, rencontrera le plan horizontal de projection en un point *tt'*, et la droite *t't''*, parallèle à 1—5, sera la trace horizontale d'un plan tangent à la surface conoïde au point 1. La droite 1—*t''* perpendiculaire sur la droite 1—5 (*fig.* 438) sera la trace d'un plan vertical, contenant la tan-

gente t'—6, et la normale 6—1, rabattues toutes deux (*fig.* 439) sur le plan de l'épure. Or, en joignant le point t'' avec a', on pourra prendre les deux droites $1a'$ et $t''a'$ pour directrices d'un paraboloïde hyperbolique, dont les génératrices, tangentes à la surface de la douelle aux points 1.2.3.4.5, auraient pour projections horizontales des droites perpendiculaires sur 1.5. Les projections de ces tangentes, sur le plan de la figure 439, concourront toutes au point 6, qui est la projection de la ligne 1—5. On construira sur cette même figure les projections des normales, perpendiculaires à celles des tangentes, et le plan horizontal *pq* qui forme le lit supérieur de la première pierre coupera toutes ces normales en des points qui, ramenés (*fig.* 438) sur les projections horizontales des normales, feront connaître l'hyberbole résultant de l'intersection de la surface de joint, par le lit horizontal supérieur de la pierre. Cette hyperbole est équilatère, et a pour asymptotes les deux droites a'—1, a'—8.

Les intersections de la surface de joint, que nous venons de construire par les deux cylindres concentriques, formant les parements intérieur et extérieur du mur, sont des courbes à double courbure. Pour les construire, on coupera la surface du joint par un plan horizontal; la section sera une hyperbole dont les intersections avec les arcs de cercle $e'x'$, $d'z'$ détermineront des points intermédiaires sur les courbes 1—1, 5—5 (*fig.* 437); mais dans la pratique, on peut ordinairement négliger cette dernière opération, la courbure de lignes 1—1, 5—5 étant très-peu sensible, et résultant d'ailleurs de la taille des autres surfaces de la pierre.

La seconde surface de joint de la voûte (*fig.* 437) a été déterminée de la même manière, à quelque différence près, motivée par l'éloignement des points où les tangentes à la voûte rencontreraient le plan horizontal de naissance. Ainsi,

le point r étant déterminé par la tangente au cercle vou, on construira la droite 9—r, qui serait tangente à la section par le plan vertical $9'k'$; cette droite 9—r prolongée ira percer en kk' le plan horizontal kl, formant le dessus de la deuxième assise. La droite $k'k''$, parallèle à l'arête de douelle 9.10, représente l'intersection du plan horizontal kl par le plan tangent au point 9, et la droite $k''9'$ sera, par conséquent, la trace d'un plan vertical, perpendiculaire sur l'arête 9.10, et contenant la normale du point 9. Ce plan normal étant rabattu sur l'épure (*fig.* 440) le point k'' viendra se placer en k''', et l'on aura $k''k'''$ égal à la distance du point 9 au plan kl (*fig.* 437). Ainsi, dans le rabattement (*fig.* 440) k'''—$9'$ sera la tangente au point 9, et $9'$—y'' sera la normale qui percera le plan horizontal kl en un point y'', que l'on ramènera en y' sur la trace du plan normal k''—$9''$. Enfin, joignant k'' avec a', l'arête de douelle a'—$9''$ et la droite $a'k''$, située dans le plan horizontal kl, seront les directrices d'un paraboloïde hyperbolique tangent que l'on construira comme précédemment.

La tangente au point 18 aura pour projection horizontale 18—g', et pour projection rabattue (*fig.* 440) $9'$—g'', d'où l'on déduira la normale $9'$—h'', et par suite le point h' appartenant à l'arc d'hyperbole $y'h'$, suivant lequel la surface de joint est coupée par le plan horizontal supérieur de la deuxième assise. On opérera de même pour les autres points.

446. Ces diverses manières de faire les joints de la conoïde sont présentées ici comme sujet d'exercice. Leur emploi serait motivé par le désir d'éviter les angles aigus, mais il est évident, d'un autre côté, que si les deux surfaces de joints convexes et concaves, qui doivent s'appliquer l'une sur l'autre, ne sont pas parfaitement identiques, il arrivera qu'après la pose les pierres n'auront pas l'aplomb qui leur convient, et le tassement ou

la poussée les fera éclater ou glisser sur leur joint. On aura donc perdu, par la difficulté d'exécution, ce que l'on aurait gagné par l'exactitude du principe; aussi, dans la pratique, on préfère employer les moyens suivants.

Supposons qu'il s'agisse du joint passant par l'arête de douelle 12—13 (*fig.* 435). On se contentera de construire par le milieu de l'arête de douelle une droite 14—15, normale à la voûte, ou simplement, comme nous l'avons fait ici, à la directrice *vou*, et l'on prendra pour joint le plan qui contiendrait cette normale et l'arête de douelle 12—13. L'intersection de ce plan avec le lit horizontal supérieur sera une droite horizontale 16—17, parallèle à l'arête de douelle 12—13, et les coupes apparentes dans les parements du mur seront les droites 12—16, 13—17, dont les angles, avec les arcs de pénétration de la voûte conoïde dans le mur, différeront assez peu de l'angle droit pour que l'on puisse les admettre sans inconvénient.

Si la portion de la surface conoïde formant l'intrados de la voûte était très-longue, on ferait le joint par plusieurs plans (*fig.* 443), contenant tous l'arête de douelle, mais qui seraient déterminés, le premier par la normale du point 2, le second par celle du point 3, et enfin le troisième par celle du point 4.

Taille. Supposons que l'on veuille tailler le second voussoir de la voûte (*fig.* 437); on préparera la pierre sur le panneau de sa projection horizontale (*fig.* 438), puis on développera (*fig.* 441) les deux panneaux de pénétration dans les cylindres verticaux, formant les parements extérieur et intérieur du mur. Ces panneaux étant appliqués sur la pierre (*fig.* 442), les courbes 5—10, 1—9, serviront de directrices à la surface réglée de la douelle, que l'on taillera en faisant

glisser une règle sur les points de repère. Cela étant fait, on découpera une cerce horizontale sur le contour de l'hyperbole $y' - h'$, que l'on tracera dans le plan horizontal supérieur. Cet arc d'hyperbole et l'arête de douelle seront les directrices de la surface du joint supérieur.

On agira de la même manière pour le joint inférieur.

Dans le cas où le joint serait formé par un plan, l'arc d'hyperbole serait remplacé par une droite, parallèle à l'arête de douelle.

III.

447. **Deuxième exemple de conoïde.** — On s'est proposé dans cet exemple de construire une voûte qui se raccorderait d'un côté avec une plate-bande rabattue (*fig.* 444), et de l'autre côté avec un arc plein cintre rabattu (*fig.* 445). La figure 446 est la projection verticale de la voûte, que l'on suppose coupée symétriquement par un plan parallèle aux pieds-droits. La fig. 447 est la projection horizontale de la première assise vue par-dessous : on a supprimé sur l'épure les assises supérieures.

La surface de douelle de cette voûte sera un conoïde ayant pour directrice : 1° la droite horizontale *ab* de la plate-bande (*fig.* 444) ; 2° l'arc de cercle *cu* formant le cintre de la fig. 445 ; enfin, pour troisième condition, la génératrice devra rester parallèle au plan vertical de projection.

Chaque joint est une surface réglée, engendrée par une droite, qui se meut parallèlement aux plans de la plate-bande

et de l'arc *cu*, en s'appuyant, d'une part, sur l'arête de douelle, et d'autre part sur la droite qui joindrait le centre de l'arc *cu* avec le sommet *r* du triangle équilatéral *bvr*, construit sur *bv* double de *ab*. Il résulte de cette combinaison qu'aux deux extrémités de la voûte les coupes apparentes satisferont aux conditions énoncées pour les plates-bandes et les arcs plein cintre.

Les projections des génératrices de la première surface de joint sur les figures 444 et 445 concourront aux points *s*, *s'*, et sur les figures 446 et 447 ces mêmes génératrices seront projetées par des parallèles aux plans des têtes; la fig. 448 fait voir la disposition de l'extrados.

Taille. Pour tailler les pierres de cette voûte, on fera à chaque tête des coupes telles que *pm* perpendiculaires aux lignes moyennes de la douelle, et l'on construira les panneaux rabattus A, qui, appliqués sur les extrémités du voussoir, serviront de directrices aux surfaces de douelle et de joints.

IV.

448. **Voûte d'arête en tour ronde.** — Cette voûte projetée (*fig.* 449 et 450, *Pl.* **51**) résulte de la pénétration d'une voûte conoïde (443) dans une voûte annulaire (430); la surface conoïde a pour directrice le demi-cercle *vou*, projeté sur le plan horizontal par la droite *v'u'*. Le rayon de ce demi-cercle est égal à celui du cercle *ace* rabattu (*fig.* 452), et qui provient de la section de la voûte annulaire par le plan méridien *ac*.

Si l'on voulait que la surface conoïde eût plus ou moins de largeur, il suffirait de rapprocher ou d'éloigner le demi-cercle *vou* du plan vertical de projection.

Dans l'exemple qui nous occupe, on s'est proposé de couvrir la galerie circulaire représentée (*fig.* 454) par six voûtes d'arête. Il est évident qu'il suffit pour cela de donner pour largeur à chaque conoïde le sixième de la circonférence, moins la largeur du pied-droit.

Les données précédentes étant admises, on supposera la fig. 452 ramenée dans le plan vertical *ae;* puis l'on construira les cercles horizontaux formant les arêtes de douelle de la voûte annulaire.

Partageant ensuite le demi-cercle *vou* comme le demi-cercle *ace*, on projettera les points de division sur la droite *v'u';* ce qui déterminera les génératrices de la voûte conoïde; et les intersections des ces droites avec les cercles qui sont à la même hauteur dans la voûte annulaire appartiendront à deux courbes à double courbure *mon*, *m'o''n'*, provenant de la pénétration des deux voûtes.

Quelques constructeurs se sont donné pour condition que les projections horizontales des arêtiers soient des arcs de cercle; mais cette forme, moins gracieuse que celle que nous adoptons ici, n'est motivée par aucun avantage réel.

Les joints de la voûte annulaire seront des surfaces coniques, ayant leurs sommets sur la verticale du centre, et les joints de la voûte conoïde se construiront comme dans l'épure précédente.

Les joints de la portion de conoïde projetée à gauche (*fig.* 450) sont des surfaces réglées; à droite (*fig.* 451), les

joints sont formés par des plans, contenant les arêtes de douelle et les normales aux points où ces arêtes pénètrent dans les parements extérieurs et intérieurs des murs.

Les intersections des surfaces de joints des deux voûtes sont des courbes que l'on obtiendra de la manière suivante.

On construira (*fig.* 452) un plan horizontal p, qui coupera le joint de la voûte annulaire suivant un arc de cercle rs, et le joint de la voûte conoïde suivant un arc d'hyperbole tx, et le point où ces deux courbes se rencontreront fera partie de l'intersection des deux surfaces de joints. On opérera de la même manière pour toutes les courbes analogues.

Dans la partie de conoïde projetée (*fig.* 451) les joints étant des plans, leurs sections par le plan p seront des droites parallèles aux arêtes de douelle de la voûte conoïde (446).

Taille. La pierre étant préparée sur le panneau de sa projection horizontale A, on appliquera les panneaux (*fig.* 453) qui sont les développements des pénétrations de la voûte conoïde et de ses joints dans les deux cylindres concentriques, entre lesquels la pierre se trouve comprise. Les deux courbes 1—5 de ces panneaux serviront de directrices à la surface de douelle que l'on taillera comme précédemment, en faisant glisser une règle sur les points de repère 1, 2, 3, 4, 5. Quand la douelle sera taillée, la pierre ayant la forme représentée (*fig.* 455), on portera sur chaque génératrice le point correspondant de l'arêtier, en prenant sur la fig. 451 la distance de ce point à la surface du cylindre extérieur. L'arêtier étant tracé dans la surface conoïde, on appliquera le panneau B dans le plan vertical $h'q$, et l'on tracera les deux arcs horizontaux h'—5, d'—1, qui serviront de directrices à la douelle de la voûte annulaire, que l'on taillera en faisant glisser une cerce découpée sur le contour de l'arc hd (*fig.* 452).

La fig. 456 représente la pierre dont il reste encore à dégager une partie de la douelle et du joint : les droites *bl* (*fig.* 453), et *yg* (*fig.* 452) détermineront le plan inférieur que l'on fera en fouillant la pierre jusqu'à ce que l'on puisse appliquer le petit panneau C.

La fig. 457 est la première pierre au-dessus de l'un des pieds-droits intérieurs, l'intersection des surfaces de joints est une ligne *iz*, située au-dessous du lit supérieur de la première assise. Dans la voûte projetée (*fig.* 450), *iz* est une courbe provenant de l'intersection des deux surfaces réglées formant les joints ; et dans la voûte 451, *iz* est une ligne droite, provenant de l'intersection des deux premiers plans de joints à droite et à gauche du pied-droit.

CHAPITRE III.

Surfaces hélicoïdes. Escaliers.

I.

449. Vis à noyau plein. — Dans l'escalier projeté horizontalement (*fig.* 458, *Pl.* **52**), les marches posées les unes sur les autres sont scellées par leur bout le plus large dans un mur cylindrique, formant la cage de l'escalier.

La surface de chaque marche se compose (*fig.* 459, 460) :

1° D'un plan horizontal *aoao* sur lequel on pose le pied en montant;

2° D'une face verticale *acac*, formant le devant de la marche, et de même hauteur qu'elle;

3° D'un petit plan horizontal *coco* (*fig.* 460), suivant lequel chaque marche se pose sur celle qui précède;

4° D'une surface réglée *ozoz*, engendrée par une droite horizontale, qui s'appuierait sur deux arcs d'hélice, de même pas, *oz*, *oz*, situés l'une dans le cylindre formant la surface surface intérieure du mur de cage, l'autre dans la surface du noyau;

5° Une petite face verticale, située derrière la marche ;

6° Enfin la face cylindrique *acozo*, formant l'extrémité qui vient pénétrer dans le mur.

Quant à l'autre bout de la marche, on peut lui faire porter une tranche de noyau, comme on le voit par les figures 459, 460, ou bien faire les marches indépendantes et les sceller par leur extrémité dans des entailles creusées à cet effet dans le noyau (*fig.* 461).

La figure 462 est le développement de la pénétration des marches dans le mur de cage, et la figure 463 est le développement de la pénétration dans le noyau.

Pour construire le développement (*fig.* 462), on portera à la suite les uns des autres et sur une même ligne droite tous les arcs *ao*, *oa*, *ao*, pris sur la trace du cylindre passant par les extrémités des marches (*fig.* 458) et par les points *a*, *o*, *a*, *o*, on élèvera des perpendiculaires jusqu'à la rencontre des horizontales qui déterminent les différentes hauteurs des marches. La hauteur du point *z* est arbitraire et dépend de l'épaisseur plus ou moins grande que l'on veut donner à la marche.

Le développement 463 se construira de la même manière ; les arcs *oz* étant des hélices, leurs développements doivent être des lignes droites (*Géométrie descriptive*). Il en est de même des lignes ponctuées passant par les angles correspondants des marches.

Taille. On taillera une pierre sur le contour de la projection horizontale de la marche A (*fig.* 458), en n'oubliant pas de lui laisser l'excédant de longueur qui doit pénétrer dans le mur de cage. Cela étant fait, on appliquera le panneau de

développement B (*fig.* 462) sur la face cylindrique formant l'extrémité de la marche; puis on dégagera le noyau avec précaution en dessous (*fig.* 460), jusqu'à ce que l'on puisse y tracer le petit arc *oz* qui, appartenant à une hélice, doit coïncider avec le bord d'une règle flexible, à laquelle on ferait prendre la courbure du noyau. Les deux arcs *oz*, *oz*, seront les directrices d'une surface réglée, que l'on taillera en faisant mouvoir une règle, sur les points de repère qui diviseraient les deux arcs *oz* en parties égales. C'est la nature de leurs directrices qui a fait donner à ces surfaces réglées le nom d'*hélicoïdes*.

Si l'on voulait faire les marches indépendantes du noyau, cela serait encore plus facile; aussi ne nous y arrêterons-nous pas.

Il arrive quelquefois, dans certains escaliers, que les marches sont soutenues par un mur de rampe (*fig.* 464). La figure 465 fait voir la disposition de l'appareil, et la figure 466 indique suffisamment la manière de tailler chaque pierre.

450. Le dessous de l'escalier que nous venons d'examiner est une surface brisée, composée alternativement d'une face gauche et d'une petite face verticale.

Dans l'exemple projeté (*fig.* 467) l'escalier est plafonné en dessous par une surface hélicoïde continue, dont la génératrice serait une droite horizontale qui s'appuierait sur deux hélices de même pas, situées, l'une dans le cylindre formant la surface intérieure du mur de cage, et l'autre sur la surface du noyau. Cette génératrice étant parallèle aux arêtes supérieures des marches, sa projection horizontale, *zz*, ne sera pas dirigée vers le centre du noyau, et sa position dépendra du plus ou moins d'épaisseur que l'on voudra donner aux marches de l'escalier.

D'après cela, par le point Z, suivant lequel la droite *zz* rencontre le cercle *mZn*, formant la projection horizontale de l'hélice moyenne, on construira la droite Z*t* tangente à cette hélice, et faisant Z*t* égal à deux fois l'arc *ei* pris sur le cercle *mZn*, on pourra regarder *t* comme le point où la tangente Z*t* rencontrera un plan horizontal de projection situé à deux hauteurs de marche au-dessous du point Z. La droite *dt''* sera donc la trace horizontale d'un plan tangent en Z à la surface hélicoïde formant le dessous de l'escalier. Prenant ensuite (*fig.* 468) un plan de projection perpendiculaire à la droite *zZz*, on fera sur ce plan, *vz'* égal à deux hauteurs de marches, et la droite *t''z'* sera la trace verticale du plan tangent; par conséquent *xz'*, perpendiculaire sur *t''z'*, sera un plan normal à l'hélice, qui a pour projection horizontale l'arc de cercle *mZn;* on fera *z'u'* égal à la distance verticale entre le dessus de la marche et la surface du dessous; on tracera *u'a'* parallèle à *vt'';* enfin, en faisant *a'c'* égal à la hauteur du pas et menant l'horizontale *c'o'*, tout sera déterminé : *c'o'* sera la saillie de chaque marche sur celle qui est au-dessous, et la droite *o'z'* représentera la coupe inclinée formée par le plan normal à l'hélice moyenne *mZn*. On construira dans cette coupe une horizontale intermédiaire *ss*, et les points où les trois horizontales *oo*, *ss*, *zz*, rencontrent les deux cylindres concentriques de la cage et du noyau détermineront les arcs d'ellipse suivant lesquels le plan normal *z'o'* coupe ces deux cylindres.

Z*t'* est la trace du plan qui contient la coupe rabattue (*fig.* 468).

Les figures 469, 470, sont les panneaux de développement des pénétrations des marches dans le mur de la cage et dans le noyau. Les hauteurs sont déduites de la figure 468.

Taille. Les marches se tailleront comme dans l'exemple

précédent. On remarquera cependant que si l'on veut faire porter à chaque marche une tranche du noyau, il ne faut pas que la hauteur de cette tranche excède celle du pas; il faudra donc réduire l'épaisseur du noyau comme on le voit 471. Cette diminution doit être faite en dessus, pour ne pas affaiblir l'angle aigu formé près du noyau par le plan normal *zx* et la surface hélicoïde. Il peut même arriver, et cela aurait lieu dans l'exemple qui nous occupe, que la différence de hauteur entre les points *z'* et *o'* (*fig.* 468) étant plus grande que l'épaisseur du pas, la face supérieure de la tranche du noyau serait au-dessous du petit plan de recouvrement *oc*, ce qui serait peu solide. Dans ce cas, on donnerait au noyau l'épaisseur de deux marches (*fig.* 472 et 473), et l'on ferait la marche suivante indépendante du noyau, en laissant, bien entendu, dans ce dernier, la place nécessaire pour loger le petit bout de la marche.

II.

451. **Escaliers irréguliers.** Dans les exemples d'escaliers (*fig.* 458 et 467), le plan étant circulaire, les arêtes des marches sont dirigées vers le centre. Or, les marches conservant partout la même hauteur, tandis que leur largeur diminue en s'approchant du centre, il en résulte que cette portion de l'escalier devient extrêmement rapide et dangereuse. Dans les escaliers circulaires, on ne peut diminuer cet inconvénient qu'en augmentant le rayon du noyau jusqu'à ce que la face supérieure ait une largeur suffisante; mais dans certains escaliers, on emploie d'autres moyens que nous allons indiquer.

III.

452. **Balancement.** Soit (*fig.* 474, *Pl.* 53) la projection horizontale d'un escalier, la courbe *mon* étant celle que l'on suit en montant; on partagera cette courbe en autant de parties égales que l'on voudra faire de marches, et par chaque point de division on mènera une perpendiculaire à la courbe extérieure du limon; ce qui déterminera les points 1,2,3,4. On portera les arcs 1—2, 2—3, 3—4, etc., à la suite les uns des autres, sur une droite horizontale 1—12 (*fig.* 475), et l'on construira une perpendiculaire par chacun de ces points jusqu'à la rencontre de l'horizontale qui détermine la hauteur de la marche correspondante. On obtiendra par ce moyen la ligne brisée 1—5—12, qui représente le développement provisoire de la courbe passant par les angles saillants des marches. Dans l'exemple qui nous occupe, ce développement se compose de deux lignes droites.

Il est évident que si l'on prenait les droites ponctuées de la figure 474 pour projection des arêtes des marches de l'escalier, il en résulterait: 1° que les marches auraient, sur le contour de l'arc 1—5, un rétrécissement dangereux; 2° que l'angle d'inclinaison de l'escalier changeant brusquement au moment où l'on passe de la partie circulaire à la partie droite, ou réciproquement, il en résulterait dans le limon un angle ou *jarret* d'un effet désagréable.

Le problème qui a pour but de faire disparaître ces défauts a reçu le nom de *balancement*. Il consiste principalement à augmenter la largeur des marches trop étroites aux dépens de celles qui le sont moins.

Plusieurs méthodes peuvent être employées pour atteindre ce but.

453. Quelques auteurs, par exemple, ont proposé de faire croître la largeur des marches suivant une proportion par différence. Ainsi M. Émy, dans son traité de charpente, donne la solution suivante :

Il fait la somme de toutes les marches entre lesquelles doivent se répartir les changements de direction, il en retranche la somme que l'on aurait si toutes ces marches étaient égales à la plus petite d'entre elles, puis il prend la différence obtenue pour la somme des termes d'une progression dont les termes croîtraient comme la suite des nombres naturels, et dont chaque terme représenterait l'accroissement de la marche correspondante.

Cette solution ne satisfait à aucune des conditions du problème :

1° Parce qu'elle n'augmente pas la largeur de la plus petite marche, ce qui est la condition la plus essentielle ;

2° Parce que le dernier terme de la progession n'étant pas égal à la largeur d'une marche droite, il s'ensuit que l'accroissement régulier que l'on a établi entre les marches soumises à la condition du balancement est brusquement interrompu après la dernière de ces marches qui peut différer beaucoup de la marche droite qui suit immédiatement.

Il peut même arriver que la dernière des marches balancées soit plus grande que la première des marches droites suivantes, ce qui serait très-dangereux par suite de l'habitude acquise par tout le monde, de rencontrer sous les pieds, des marches égales, ou dont les largeurs varient d'une manière insensible.

Les inconvénients que je viens de reprocher à la méthode précédente proviennent surtout de ce qu'en fixant ainsi d'avance le point de l'escalier où doit s'arrêter le balancement, on donne la *somme des termes*, *le premier terme et le nombre des termes*, de sorte qu'il n'est plus possible d'arrêter la progression à la première des marches droites qui ne sont pas soumises au balancement.

454. On peut satisfaire à cette dernière condition de deux manières :

1° En considérant comme inconnue la plus petite des marches, et dans ce cas, on pourra déterminer celle des grandes marches à laquelle doit s'arrêter le balancement;

2° En laissant au contraire parmi les inconnues le nombre des marches soumises au balancement, ce qui permettra de fixer, *à priori*, la largeur minimum de la plus petite marche.

455. *Première méthode*. Supposons que dans l'escalier projeté (*fig.* 474), la largeur de chacune des petites marches auprès du limon soit égale à 11 *centimètres*, et que chacune des grandes marches ait 32 *centimètres* de largeur.

Supposons en outre que l'on veut satisfaire à cette condition, que le balancement s'arrête à la *onzième marche* à compter du point 1, c'est-à-dire que la marche A de la fig. 474 serait le dernier terme de la progression. Il s'ensuit que l'on connaît ce dernier terme, qui vaut 32 *centimètres*, et que nous nommerons u.

On connaît également *le nombre des termes* $n = 11$.

De plus, la somme des termes se composera : 1° de quatre

fois la largeur 11 d'une petite marche, plus de sept fois la largeur 32 d'une grande; ainsi on aura :

$$S=4\times 11+7\times 32=44+224=268.$$

Le premier terme de la progression sera donné par la formule

$$S=\frac{(a+u)n}{2},$$

qui dans le cas actuel devient

$$268=\frac{(a+32)\,11}{2}.$$

d'où

$$a=\frac{184}{11}=16{,}727=16{,}73,$$

La formule $u=a+d\,(n-1)$ devient

$$32=\frac{184}{11}+10d,$$

d'où l'on obtient

$$d=\frac{168}{110}=\frac{16{,}8}{11}.$$

Ainsi le premier terme étant

$$\frac{184}{11} \text{ et la différence } \frac{16{,}8}{11},$$

il s'ensuit qu'à partir du point 1 les largeurs des marches seront exprimées par le tableau suivant, dans lequel la seconde colonne exprime des *onzièmes* de centimètre :

NUMÉROS D'ORDRE.	LARGEURS en 11es de centimètre.	LARGEURS en centimètres.
1re	184	16,73
2e	200,8	18,25
3e	217,6	19,78
4e	234,4	21,31
5e	251,2	22,84
6e	268,0	24,36
7e	284,8	25,89
8e	301,6	27,42
9e	318,4	28,95
10e	335,2	30,47
11e	352,6	32
Sommes.	2948,6	268

Ainsi, la somme 268 des nouvelles marches est égale à celle des anciennes, et la progression s'arrête exactement au moment où l'on arrive à la première des marches droites, qui forme alors le dernier terme de la progression.

456. Cette solution, quelque satisfaisante qu'elle paraisse au premier abord, laisse encore quelque chose à désirer, parce qu'elle ne permet pas de déterminer *à priori* le minimum de largeur de la plus petite marche, *ce qui me paraît cependant la condition la plus importante.*

457. *Deuxième méthode.* Reprenons la question précédente, et proposons-nous de donner à la première marche, à compter du point 1, une largeur égale à 20 *centimètres*, c'est-à-dire à

peu près les deux tiers de la largeur d'une marche droite. Dans ce cas on ne connaît plus le nombre des termes, ni par conséquent la somme des termes : mais, en exprimant cette somme par S, on aura

$$S=4\times 11+32(n-4)=44+32n-128=32n-84.$$

De plus, la formule

$$S=\frac{(a+u)n}{2}$$

devient dans le cas actuel

$$S=\frac{(20+32)n}{2}=\frac{52n}{2}=26n;$$

exprimant l'égalité qui existe entre les deux valeurs de S, on obtient

$$32n-84=26n,$$

d'où

$$6n=84,$$

et par conséquent

$$n=\frac{84}{6}=14;$$

c'est-à-dire que le balancement se prolongera jusqu'à la quatorzième marche, qui sera la dernière de la progression

Le nombre des termes de la progression étant connu, on obtiendra la différence par la formule $u=a+d(n-1)$, qui dans le cas actuel devient

$$32=20+13d,$$

d'où

$$d=\frac{32-20}{13}=\frac{12}{13}=12\times\frac{1}{13}.$$

Ainsi, les largeurs de marche, à compter du point 16, seront données par le tableau suivant, dans lequel la seconde colonne exprime des *treizièmes* de centimètre.

NUMÉROS D'ORDRE.	LARGEURS en 13es de centimètre.	LARGEURS en centimètres.
1re	260	20
2e	272	20,92
3e	284	21,84
4e	296	22,77
5e	308	23,69
6e	320	24,61
7e	332	25,54
8e	344	26,46
9e	356	27,38
10e	368	28,31
11e	380	29,23
12e	392	30,15
13e	404	31,08
14e	416	32
Sommes.	4732	364

Ainsi, la somme 364 est égale à quatorze marches, savoir : quatre petites plus dix grandes, ce qui donne

$$4 \times 11 + 10 \times 32 = 44 + 320 = 364.$$

Cette dernière méthode permet de donner à la plus petite marche une largeur déterminée; mais on ne peut pas choisir d'avance le point où l'on veut arrêter le balancement, tandis

que la solution précédente satisfait il est vrai à la dernière condition, mais on ne peut plus alors fixer à volonté la largeur de la plus petite marche.

S'il fallait cependant donner la préférence à l'une de ces deux méthodes, je n'hésiterais pas à choisir la dernière, parce que la condition la plus essentielle est d'éviter le danger qui résulte d'une pente trop rapide vers le noyau.

Au surplus, nous allons tâcher d'arriver par d'autres moyens à la solution du problème.

458. *Troisième méthode.* La plupart des constructeurs ne se préoccupent dans la question actuelle que des moyens de faire disparaître l'angle ou jarret 1—5—12 (*fig.* 475), afin, comme ils le disent, de donner *plus de grâce* aux courbes du limon.

Dans ce cas, ils se contentent de remplacer les droites 1—5 et 5—12 par une courbe qui leur est tangente aux points où doit commencer et finir le balancement.

En opérant ainsi on négligerait évidemment la condition la plus essentielle.

Pour résoudre la question d'une manière complète, on commencera d'abord par construire le développement (*fig.* 475), on prolongera ensuite l'horizontale du point 2, jusqu'à ce que la distance *pa* soit assez grande pour que l'on puisse y poser le pied sans danger; puis on construira la droite 1*a*, que l'on prolongera jusqu'au point 13, suivant lequel elle rencontre la droite 5—12. Or, si nous remplaçons le développement 1—5—12 par la ligne brisée 1—13—12, nous aurons élargi graduellement les largeurs de marches dans la partie qui aboutit au mur intérieur. Quant à

l'angle formé au point 5, nous l'aurons reporté au point 13, en le rendant beaucoup moins aigu. Enfin on fera disparaître tout à fait le *jarret* du point 13, en remplaçant la ligne brisée 1—12—13 par un arc de cercle ou une courbe à deux centres tangentes aux droites 1—13,13—12. Les points *a*,*c*,*e*, étant reportés sur la courbe 1,2,3,4 (*fig.* 474), les arêtes des marches seront déterminées.

459. La figure 476 est la projection horizontale d'un escalier dont le plan est irrégulier.

Les milieux des côtés du polygone formant la cage étant joints par des courbes tangentes, on élèvera des normales à ces courbes, et portant sur ces normales des distances égales, on déterminera la courbe qui passe par les extrémités des marches, ainsi que la ligne que l'on suit en montant.

On partagera cette dernière ligne en partie égales, et l'on fera le balancement des marches. Dans cet exemple, on s'est contenté de partager la courbe intérieure en parties égales. L'escalier est plafonné en dessous par une surface réglée, dont les génératrices auraient pour projection horizontale les droites *zz*, parallèles aux arêtes apparentes des marches correspondantes, en ajoutant pour condition que les distances 2Z,3Z,4Z, seront égales entre elles.

Les profils et coupes des marches se détermineront comme dans l'exemple 450, à cette seule différence près, que par suite de la variation de courbures de la ligne Z—Z—Z, etc., les plans tangents et les plans normaux formant les coupes en dessous des marches n'ayant pas les mêmes inclinaisons par rapport au plan horizontal, il faudra faire une figure pour chaque marche. On aura le soin de faire toutes les distances

verticales *zu* égales entre elles, afin de conserver partout la même épaisseur à l'escalier; de sorte qu'il n'y aura de différence que dans les faces de recouvrement, dont les largeurs dépendront du plus ou moins d'inclinaison des plans normaux.

Les figures 477, 478, sont les développements des pénétrations des marches dans le mur de cage et dans le mur formant le noyau.

CHAPITRE IV.

Limons.

I.

460. **Définition.** — Les marches d'un escalier étant scellées dans le mur de cage, leur coupe suffit pour les maintenir en équilibre. Cela provient de ce que la perpendiculaire, qui contient le centre de gravité de chacune, passerait dans l'intérieur du triangle formé par les points d'appui; on peut donc quelquefois supprimer le mur intérieur, ce qui fait donner à ces escaliers le nom de vis à jour ou escaliers suspendus. Mais quelque ébranlement dans la construction, ou quelque défaut dans les matériaux, pouvant faire rompre une marche ou faire désunir les assemblages, on a dû chercher à augmenter la solidité en faisant porter à chaque marche un morceau taillé comme on le voit fig. 480.

L'ensemble de tous ces morceaux, qui se recouvrent successivement, forme cette partie de l'escalier à laquelle on donne le nom de limons, et qui est destinée à supporter la rampe. Cette manière d'opérer a pour principal inconvénient d'occasionner beaucoup de déchet; aussi est-il préférable de faire le limon par une suite de pierres courbes et rampantes, dans

lesquelles on creuse des entailles pour assembler les petits bouts des marches.

La taille de ces pierres présentant quelques difficultés, nous allons entrer dans tous les développements nécessaires.

461. Si le rayon de courbure du limon est peu considérable, on taillera (*fig.* 481) une pierre sur le contour de la projection horizontale, puis, avec une règle flexible, on tracera dans les deux surfaces cylindriques intérieures et extérieures les arcs qui doivent servir de directrices aux deux surfaces réglées formant le dessus et le dessous du limon; enfin, on fera aux extrémités, les coupes des crossettes perpendiculaires à la courbe qui passerait par le milieu de l'épaisseur de la pierre.

462. Dans le cas où le limon aurait un grand rayon de courbure, cette méthode causerait beaucoup de déchet. C'est ce qui a fait imaginer les moyens suivants :

II.

463. **Construction des hélices.** — On sait (149, 177) *qu'une hélice est la courbe décrite par un point qui s'élève à chaque instant d'une quantité proportionnelle à celle parcourue dans le même instant par sa projection horizontale.* On dit qu'une *hélice est circulaire ou elliptique*, selon que sa projection horizontale est un cercle ou une ellipse.

C'est de la définition précédente que résulte cette consé-

quence déjà plusieurs fois citée, que *le développement d'une hélice est toujours une ligne droite.*

D'après cela, soit (*fig.* 484, *Pl.* 54), la projection horizontale du limon d'un escalier circulaire, on veut en construire la projection verticale.

Les surfaces de ce limon (*fig.* 483) sont engendrées par les quatre côtés du rectangle A, qui se meut de manière que son plan contienne constamment la verticale du point O, tandis que les sommets 8, 9, 10, 11 parcourent quatre hélices de même pas, situées dans les deux cylindres concentriques 0—4—8, *ace;* le pas de ces hélices est égal à deux fois la hauteur du point 8 au-dessus de l'horizontale du point *o*.

Pour construire l'hélice du point 8, on partagera la hauteur verticale 0—8 en autant de parties égales qu'il y a de marches dans une demi-révolution de l'escalier. On partagera ensuite de la même manière le demi-cercle 0—4—8 (*fig.* 484), et par chacun de ces derniers points de division on élèvera une perpendiculaire jusqu'à la rencontre de l'horizontale correspondante, ce qui déterminera tous les points de la courbe demandée.

On opérera de la même manière pour l'hélice du point 11, dont tous les points se projettent horizontalement sur le demi-cercle *ace*.

Quant aux hélices des points 9 et 10, elles auront les mêmes projections horizontales que les deux hélices précédentes; mais les hauteurs n'étant plus les mêmes, les horizontales des points 0, 1, 2, 3, etc., ne pourront plus servir. Cependant, au lieu de construire de nouvelles horizontales, il sera préférable, pour éviter la confusion, de prendre sur la

figure 483 la différence de hauteur 8—9 et de porter cette hauteur verticalement au-dessus des points déjà obtenus pour l'hélice du point 8; on agira de même pour toutes les hélices qui seront situées sur un même cylindre. Ainsi, pour l'hélice du point 10, on portera la hauteur 11—10 au-dessus des points déjà obtenus pour l'hélice du point 11.

III.

464. **Tangente à l'hélice, section droite.** — Le point m, au milieu de la petite verticale 12—4 (*fig.* 483), et le point m', milieu de l'horizontale c—4 (*fig.* 484), sont les deux projections d'un point appartenant à l'hélice parcourue par le centre du rectangle A. Cette hélice projetée sur le plan horizontal par le demi-cercle $x'm'z'$ se nomme l'*hélice moyenne* du limon; or, si l'on fait la verticale md égale à quatre hauteurs de marches et que l'on porte sur l'horizontale dt quatre fois la huitième partie de la demi-circonférence $x'm'z'$, l'hypoténuse tm sera la tangente au point m de l'hélice moyenne.

On remarquera que pour avoir cette tangente, il n'a pas été nécessaire de construire la projection verticale de l'hélice moyenne. Si l'on voulait avoir une tangente à tout autre point, on construirait d'abord sa projection horizontale et l'on en déduirait facilement la projection verticale, en portant sur la verticale correspondante la difference de hauteur entre chacune des extrémités de la tangente.

465. Le quadrilatère $novu$ (*fig.*, 484) est la section du limon par un plan pq perpendiculaire à l'hélice moyenne.

Cette figure, amenée en B′, a été de nouveau projetée en B (*fig.* 483).

IV.

466. Limon ou courbe rampante circulaire. — La figure 485 étant la projection horizontale du limon que nous supposerons engendré par le rectangle vertical A (*fig.* 486), on déterminera sur la circonference les points suivant lesquels on veut faire les coupes. Il ne faut pas faire les pierres trop longues, d'abord par économie, puisque l'on perd tout ce qui résulte de la taille des deux surfaces cylindriques entre lesquelles le limon se trouve compris; mais ensuite, une pierre trop longue serait plus exposée à se rompre et plus difficile à poser.

On fera, autant que possible, toutes les pierres du limon de la même longueur, afin que les épures et les panneaux nécessaires à la taille de l'une d'elles puissent servir pour toutes les autres.

On prendra ensuite (*fig.* 486) un plan de projection parallèle au plan vertical qui toucherait l'hélice moyenne du limon au milieu de la longueur de la pierre que l'on veut tailler. Toutes les hélices du limon étant projetées sur la figure 486, on construira le triangle rectangle *mtd*, en faisant *md* égal à deux ou trois hauteurs de marche, et *td* égal à autant de parties correspondantes prises sur la circonférence moyenne de la projection horizontale du limon; l'hypoténuse *tm* sera la projection verticale de la tangente à l'hélice moyenne (464). On fera le plan *pq* perpendiculaire à cette tangente, et l'on projettera sur le plan horizontal le quadrilatère curviligne *novu*,

qui résulte de la section des quatre arêtes du limon par le plan *pq*. Les deux côtés *ov*, *nu*, sont des arcs d'ellipse, provenant de la section des deux cylindres concentriques qui comprennent la pierre, et les deux autres côtés *on*, *vu*, sont des courbes résultant des sections des surfaces au-dessous et au-dessus du limon par le plan *pq*. Pour obtenir un point intermédiaire sur chacune de ces courbes, il faudrait construire les hélices engendrées par les milieux des côtés du rectangle A; mais afin d'éviter la confusion, ces lignes n'ont pas été conservées sur l'épure.

En supposant que le quadrilatère *onvu* tourne en glissant sur l'hélice moyenne, de manière à rester toujours perpendiculaire à cette hélice, on l'amènera successivement dans la position B′ et C′; puis, élevant des perpendiculaires, on construira les projections verticales B et C des deux faces qui terminent la pierre dont les projections sont alors complètes.

Taille. Pour tailler une pierre de limon, on peut employer deux méthodes.

V.

467. **Première méthode.** — On déduira la pierre par dérobement d'un parallélipipède rectangle, dont les faces seraient :

1° Deux plans verticaux ayant pour traces les droites *ci*, *ci* (*fig*. 485);

2° Deux plans *ac*, *ei* (*fig*. 486), perpendiculaires au plan vertical de projection et aux deux premiers plans;

3° Enfin, deux plans *ce*, *ai*, perpendiculaires aux quatre premiers et au plan vertical de projection.

Ce parallélipipède, que l'on taillera, sera la première des formes successives que doit prendre la pierre.

Les génératrices des deux cylindres concentriques, entre lesquelles le limon se trouve compris, étant prolongées jusqu'aux deux plans *ac*, *ei* (*fig.* 486), on construira les ellipses provenant de leur intersection avec ces plans, en prenant sur la projection 485 les distances de chaque point au plan vertical *ci*, et l'on rabattra ces courbes comme on le voit (*fig.* 487 et 488). On construira pareillement et l'on rabattra (*fig.* 489 et 490) les courbes suivant lesquelles les surfaces du limon traversent les plans *ce*, *ai* (*fig.* 486); puis, appliquant les quatre panneaux D, E, F, G, sur les faces correspondantes du parallélipipède (*fig.* 491), leurs contours serviront de directrices aux deux cylindres concentriques, entre lesquels est compris le limon; ces deux cylindres étant taillés, on y tracera leurs génératrices, et après avoir marqué au moins sur deux de ces génératrices les points appartenant aux arêtes du limon, on tracera ces hélices avec une règle flexible, à laquelle on fera prendre la courbure des cylindres, et ces lignes serviront de directrices aux deux surfaces réglées formant le dessus et le dessous du limon. Enfin, en déterminant sur les arêtes les sommets des deux quadrilatères B, C, on fera les plans qui terminent la pierre.

La figure 492 représente la pierre en partie taillée.

On remarquera que les panneaux D, E, sont identiques, ainsi que les panneaux F, G; cela provient non-seulement de la forme circulaire du limon, mais encore de la disposition régulière des faces du solide enveloppe. Il est certain que

cette symétrie permettra de ne construire que deux panneaux, que l'on retournerait pour tracer les faces opposées de la pierre ; mais dans ce cas, il ne faudrait pas oublier de changer les numéros des points de repère.

VI.

468. **Deuxième méthode.** — La seule différence qu'il y ait entre cette méthode et celle que nous venons d'exposer, c'est que le solide enveloppe, au lieu d'être un parallélipipède rectangle, sera un prisme trapézoïdal, dont deux faces *ci*, *ci* (*fig.* 493, *Pl.* **55**) seraient, comme précédemment, perpendiculaires au plan horizontal. Deux autres faces *ca*, *ei* (*fig.* 494) seraient perpendiculaires au plan vertical de projection ; enfin les deux dernières faces *ccee*, *aaii*, seraient les plans mêmes contenant les extrémités de la pierre.

Les projections verticale et horizontale du limon étant construites, comme dans l'épure précédente, on fera (*fig.* 493) la droite $m't'$ tangente au cercle moyen de la projection horizontale, et l'on portera sur la verticale mm' une grandeur md telle que l'on ait $md : td$ comme le pas de l'hélice moyenne est au développement de sa projection horizontale (464) ; on obtiendra la droite tm qui est la projection verticale de la tangente au point m. On fera le plan pq perpendiculaire sur tm, et l'on déterminera la projection horizontale de la section que l'on amènera successivement dans les positions B,B',C,C' ; par suite de ce mouvement, la tangente $t'm'$ viendra se placer successivement en $t''m''$ et en $t'''m'''$ (*fig.* 493) ; on construira les projections verticales correspondantes en tenant compte

des quantités dont les points m,d,t, auront monté ou descendu.

Céla étant fait, on élèvera des perpendiculaires par les deux points r',s', suivant lesquels l'horizontale du point m'' perce les deux faces verticales du solide enveloppe; ce qui fera connaître (*fig.* 494) les deux points r,s, par lesquels on construira les deux côtés ce,ce, perpendiculaires à tm, projection verticale de $t''m''$, et l'on aura, par ce moyen, le quadrilatère $ccee$, qui résulte de la section du solide enveloppe par le plan qui contient l'extrémité inférieure de la pierre.

On construira de la même manière le quadrilatère $aaii$, qui contient l'autre extrémité; puis on fera glisser ces deux quadrilatères sur l'hélice moyenne, l'un en montant, l'autre en descendant; jusqu'à ce que leurs plans viennent s'appliquer l'un sur l'autre, et contiennent tous deux le point m,m': et de là, par des verticales on projettera tous les angles de ces deux quadrilatères sur la trace verticale du plan pq, d'où on les rabattra sur le plan horizontal (*fig.* 497, 498) en faisant tourner le premier autour d'une horizontale projetée par le point h, et le second autour de l'horizontale du point k.

Les panneaux D,E, se construiront comme dans l'épure précédente.

La figure 499 indique la manière d'appliquer les panneaux sur la pierre.

469. La méthode précédente paraît exiger un solide moins grand que la première; mais les carriers ne fournissant point de bloc sous la forme de trapèze, il est évident que l'on ne doit pas compter sur l'économie résultant de la coupe oblique

formée par les plans qui contiennent les faces extrêmes du limon. D'ailleurs, la première méthode permettant de couper la pierre à angles droits par les points *n*,*u* (*fig.* 486, *Pl.* 54), le parallélipipède rectangle que l'on emploierait serait un peu moins long que celui qui est nécessaire dans le second cas ; et la seule économie que l'on puisse faire valoir, résulte de ce que l'on est dispensé de tailler après coup les deux têtes, ce qui est un travail peu considérable pour un habile ouvrier.

VII.

470. **Limon non circulaire.** — Les méthodes employées précédemment pour tailler les pierres du limon doivent être nécessairement modifiées dans le cas où la projection horizontale ne serait pas circulaire. Il est évident, en effet, d'abord, qu'il faudra une épure particulière pour chaque pierre, ensuite les deux panneaux de tête n'étant pas identiques ne pourront pas être déduits d'une même section normale à l'hélice moyenne. Il faudra donc faire autant de projections particulières qu'il y aura de coupes.

La planche **56** indique la disposition générale du travail ; soit (*fig.* 500) la projection horizontale du limon. On suppose ici que les arêtes des marches prolongées sont tangentes au cercle O, de sorte que les projections des courbes du limon seront des développantes du même cercle. On déterminera d'abord sur la courbe moyenne du limon les points B'C'D', par lesquels on veut faire les coupes ; puis on construira la projection verticale rabattue (*fig.* 501), que l'on coupera par un plan perpendiculaire à la tangente, et l'on déduira le quadrilatère B' (*fig.* 500).

On fera ensuite la projection auxiliaire (*fig.* 502); on en déduira le quadrilatère C′; on projettera ensuite (*fig.* 503) la pierre B′C′ sur un plan parallèle à sa longueur, et l'on déterminera, comme nous l'avons fait, le parallélipipède rectangle qui enveloppe la pierre, les deux panneaux rabattus l'un sur l'autre (*fig.* 504) et les deux panneaux (*fig.* 505 et 506) provenant de la pénétration du limon dans les faces extrêmes du parallélipipède; on suppose que le panneau 505 s'est avancé jusqu'à *ab*, puis de là rabattu sur le plan horizontal, et que le panneau 506 a tourné autour de l'horizontale du point *c*.

Pour varier les sujets d'exercice, nous supposerons que l'on veuille tailler la pierre C′D′ par la deuxième méthode; nous supposerons de plus que l'on veuille terminer l'extrémité supérieure de cette pierre par une crossette.

On fera la projection auxiliaire 507, sur laquelle on déterminera le profil de la crossette que l'on projettera sur le plan horizontal; ensuite on construira la projection 508, et l'on déterminera sur cette figure et sur la projection horizontale les limites du solide enveloppe, en observant que le plan *pq* (*fig.* 507) doit passer par la face extrême de la crossette que l'on ne fera qu'en dernier lieu.

Le panneau C′ projeté sur la figure 502 est rabattu (*fig.* 510) autour de l'horizontale du point *d*, et le panneau D′ projeté (*fig.* 507) et tournant sur l'horizontale du point *e*, est rabattu (*fig.* 511). Les figures 513 et 514 représentent la première pierre du limon.

CHAPITRE V.

Voûtes destinées à supporter ou à couvrir des escaliers.

I.

471. **vis Saint-Gilles.** — La douelle de la voûte connue sous le nom de *vis Saint-Gilles* (*fig.* 515, *Pl.* **57**) a pour génératrice un demi-cercle vertical qui se meut en montant autour d'un cylindre, de manière que chaque point décrive une hélice. Les joints sont des surfaces hélicoïdes engendrées par les normales à la courbe génératrice de la douelle.

472. Cette voûte, destinée à soutenir les marches d'un escalier, n'est autre chose qu'une voûte annulaire rampante.

Les pierres peuvent être taillées par l'une ou l'autre des deux méthodes exposées n°s 467, 468.

C'est la méthode du n° 468 qui a été employée ici.

473. Les projections verticale et horizontale de la pierre étant construites, ainsi que les hélices moyennes et celles

qui passeraient par les quatre angles du quadrilatère *nouv* (*fig.* 518), on construira comme précédemment, la projection horizontale de la section par le plan *pq*, perpendiculaire à l'hélice moyenne de la douelle, et reportant cette figure en B' et C' (*fig.* 516), on en déduira les faces B et C (*fig.* 517); ce qui complétera la projection verticale de la pierre.

On pourrait mener le plan *pq* perpendiculaire à une hélice qui passerait par le centre du rectangle A, comme on l'a fait plus haut (466); mais les arêtes d'un limon restant à découvert, sont plus exposées à être brisées par le choc des corps extérieurs; on doit donc faire en sorte que les angles s'approchent le plus possible de l'angle droit, tandis que dans la vis Saint-Gilles les arêtes de la douelle sont seules apparentes, et ont par conséquent besoin d'avoir plus de force que les autres arêtes garanties par les pierres qui les recouvrent.

Le solide enveloppe de la pierre et les rabattements des panneaux s'obtiendront comme dans l'exemple de la planche 55.

Taille. On commencera par tailler la pierre comme pour un limon d'escalier, en supposant qu'elle soit engendrée par le rectangle *novu* (*fig.* 522).

Cela étant fait, on tracera dans le cylindre intérieur l'hélice *x—x*, et dans la surface réglée supérieure l'hélice *w—w*. Ces deux courbes, sur lesquelles on aura soin de marquer les points de repère, serviront de directrices au joint supérieur; on tracera ensuite, dans le cylindre extérieur, l'hélice *zz*, et dans la surface réglée inférieure l'hélice *yy* : ces courbes serviront de directrices au joint inférieur. La douelle se taillera au moyen d'une cerce découpée sur l'un des panneaux B ou C (*fig.* 520, 521); on fera glisser cette cerce sur les deux

hélices *xx*, *yy*, en maintenant son plan perpendiculaire à l'hélice moyenne de la douelle.

On pourrait aussi se servir d'une cerce découpée sur le panneau A; mais dans ce cas il faudrait maintenir le plan de la cerce dans une position qui correspondît toujours à un plan méridien, ce qui serait plus difficile.

Les voussoirs de naissance (*fig.* 515, 523) doivent faire partie des assises du mur et du noyau.

La pierre du noyau (*fig.* 524) se déduit d'un cylindre vertical (*fig.* 516); les hélices seront tracées sur la surface de ce cylindre avec une règle flexible, et le reste ne présentera aucune difficulté.

II.

474. **Vis Saint-Gilles carrée.** — Le rectangle A (*fig.* 525, *Pl.* 58) étant la projection horizontale d'un escalier, on partagera les côtés en autant de parties égales que l'on voudra de marches, et l'on dirigera les arêtes vers le centre de l'escalier. On peut, comme nous l'avons dit dans plusieurs exemples précédents, faire tenir les marches par la combinaison de leurs coupes, et par leur scellement dans le mur. Mais si nous supposons que l'escalier soit destiné à supporter de grands fardeaux, on pourra s'y prendre comme il suit.

On voûtera le dessous des marches de chaque rampe par une surface réglée, ayant pour directrices deux cercles, ou deux ellipses verticales situés dans les plans *ao*, *co*, en y ajoutant cette condition que la génératrice de cette surface reste constamment parallèle au mur de cage.

Nous allons donner les détails d'épure pour quelques-uns des voussoirs principaux.

Les figures 526 et 527 sont les deux projections verticale et horizontale de l'un des voussoirs, appartenant à l'angle rentrant de la voûte; la droite *o—o* est la ligne de naissance dans le mur de cage; l'inclinaison de cette droite dépend de la pente que l'on veut donner à l'escalier. Les parties marquées en hachures sur les figures 526, 528 et 531, sont les coupes par les plans qui contiennent les diagonales *ao*, *co* (*fig.* 525).

Après avoir fait *ob* (*fig.* 526) égal à la huitième partie de la hauteur d'une révolution entière, on décrira l'arc de cercle 0123, qui est la projection de l'une des ellipses servant de directrice à la voûte. On déterminera sur cet arc la division en voussoirs, et l'on portera les ordonnées des points 123456 sur la droite 05, qui partage en deux parties égales la projection verticale du noyau, cette droite pouvant être regardée comme la section de la voûte par un plan perpendiculaire au plan vertical de projection. Cette première opération fera connaître la projection de la partie du voussoir qui est parallèle au plan de la figure 526; on fera les coupes par les plans *mp*, *nq*, perpendiculaires à la droite 2—2, qui passe par le milieu de la douelle. Ces coupes rabattues sur le plan horizontal donnent les panneaux A, B.

En opérant de la même manière, on construira la projection 528, d'où l'on déduira le panneau C, provenant de la section par le plan *dr*, perpendiculaire à la ligne 2—2. Tous les points de cette section, ramenés sur la figure 526, compléteront la projection verticale du voussoir.

Les figures 529, 530 et 531 sont les projections d'un des

voussoirs appartenant à la partie saillante de l'arêtier; ces projections se construiront comme celles du voussoir précédent.

Les panneaux D,E résultent des sections par les plans verticaux, contenant les arêtiers de la voûte. Le premier de ces panneaux est rabattu en tournant autour de la verticale du point *h* (*fig.* 527) et le second autour de la verticale du point *y* (*fig.* 530).

La figure 532 est la projection verticale d'un claveau courant.

Le peu d'élégance de cette voûte, et les angles aigus qui existeraient aux extrémités des marches, suffisent pour en faire rejeter l'emploi dans les constructions; aussi ne doit-on considérer cette épure que comme un sujet d'exercice. Cependant si quelques circonstances particulières engageaient à exécuter une voûte de ce genre, il faudrait tâcher de distribuer de la même manière les coupes sur les quatre faces, afin que les épures nécessaires à l'une d'elles puissent servir pour les trois autres.

Taille. Le voussoir courant (*fig.* 532 et 533) se déduira d'un parallélipipède rectangle, équarri sur la projection (*fig.* 532). Les panneaux A,B, sur les contours desquels on marquera des points de repère, serviront de directrices à toutes les surfaces réglées, formant la douelle, les joints et l'extrados du voussoir.

Le voussoir d'angle présentera plus de difficultés, surtout si pour épargner la pierre on veut le déduire du parallélipipède incliné *vuzx* (*fig.* 526).

Supposons que l'on ait dressé avec soin toutes les faces de ce parallélipipède représenté en perspective (*fig.* 534).

La face rectangulaire *xxzz* étant celle qui doit contenir le panneau A (*fig.* 527), on prendra (*fig.* 526) les distances *vs*, *eu;* que l'on portera sur les arêtes *vx*, *uz*, du parallélipipède (*fig.* 534); on tracera avec l'équerre les droites *ss*, *ee* égales à *s*—3 (*fig.* 527), et l'on fera l'angle rentrant formé par les deux branches du voussoir.

Les droites *va*, *sc* (*fig.* 526) étant portées sur les arêtes correspondantes (*fig.* 534), on tracera l'horizontale *ac*, on prendra ensuite sur la figure 528 les distances *vd*, *si*, que l'on portera sur *vv*, *ss* (*fig.* 534) et l'on taillera le plan incliné *adic*, destiné à recevoir le panneau C (*fig.* 527).

La petite distance *vt* (*fig.* 527) étant portée sur l'arête *vv* (*fig.* 534), on tracera la droite *st*, qui avec la verticale *se* détermineront le plan vertical contenant l'arêtier de la voûte.

Cela étant fait, on dégagera la pierre en dessus avec précaution, en suivant le plan vertical *tse*, jusqu'à ce que l'on puisse appliquer, comme on le voit figure 535, un patron découpé sur le contour supérieur du panneau D. Les côtés 3—4, 4—5, de ce panneau, et les côtés correspondants des panneaux A et C, serviront de directrices aux deux surfaces réglées, formant le dessus du voussoir et le joint supérieur.

On dégagera ensuite la pierre en dessous, jusqu'à ce qu'on puisse tracer le contour inférieur du panneau D; ce qui déterminera toutes les coupes.

Il sera plus commode de commencer le dessus par la branche qui descend, et le dessous par la branche qui monte.

Le même moyen pourrait convenir pour tailler le voussoir projeté (*fig.* 529); mais par suite de la position presque verticale des branches de ce voussoir, il sera plus simple, et presque aussi économique, de le déduire d'un parallélipipède rectangle équarri sur la projection horizontale et sur la hauteur.

Les pierres du noyau se tailleront comme on le voit figure 536.

III.

Surfaces des joints de la vis Saint-Gilles.

475. **Joint normal.** — Les joints de la vis Saint-Gilles (*fig.* 515, *Pl.* 57) étant engendrés par les rayons prolongés du cercle générateur de la douelle, il en résulte que les surfaces de ces joints ne sont pas normales à la voûte. On peut se proposer, comme sujet d'exercice, de satisfaire à cette condition.

Soit (*fig.* 537, 538, *Pl.* **59**), ah, $a'h'$, l'arête de douelle d'une vis Saint-Gilles ronde, engendrée par le demi-cercle vertical max; on construira d'abord la droite ao, $a'o'$, tangente en a au cercle max. Ensuite on fera le triangle rectangle abc, en portant de a en b deux hauteurs de marches, et sur bc deux parties correspondantes de la circonférence $a'h'$. L'hypoténuse ac sera la tangente à l'hélice ah, rabattue sur le plan vertical de projection. Le point v', suivant lequel cette tangente perce le plan horizontal, étant ramené en u', on construira $u'o'$ qui sera la trace horizontale d'un plan tangent en a,

et la droite $a'n'$, perpendiculaire sur $u'o'$, sera la projection horizontale de la normale, dont la projection verticale an doit être perpendiculaire sur ao, puisque cette tangente ao est parallèle au plan vertical de projection. En supposant que la normale an perce l'extrados de la voûte en un point nn' on construira l'hélice projetée horizontalement par l'arc de cercle $n'd'$. Cette hélice avec l'arête d'intrados seront les directrices d'une surface réglée qui sera normale à la douelle, et que l'on pourra prendre pour joint. Toutes les génératrices de cette surface sont tangentes à un cylindre ayant pour trace l'arc de cercle $z'd'$ (*fig.* 538).

IV.

476. **Joint développable**. — La surface précédente est composée d'un certain nombre de quadrilatères gauches, formés par les normales à la voûte et par les cordes successives de l'hélice ah. Or concevons (*fig.* 539 et 540) les deux normales an, $a'n'$; cu, $c'u'$; construisons de plus les deux cordes ac, $a'c'$; co, $c'o'$; si l'on fait passer un plan par la première normale et la première corde, un deuxième plan par la seconde normale et la seconde corde, un troisième plan par la troisième normale et la troisième corde, etc., on pourra considérer tous ces plans comme les positions successives d'un plan mobile, dont les intersections détermineront une surface réglée développable, différant très-peu de la surface normale, surtout auprès de l'arête d'intrados, ce qui est essentiel si l'on veut employer cette surface comme joint de la vis Saint-Gilles. D'après cela, un plan horizontal pq coupera la première normale en un point nn' et la première corde en ss',

la seconde normale en uu' et la seconde corde en zz', et la droite cx, $c'x'$ sera l'intersection des deux premiers plans, et pourra servir de génératrice à la surface demandée.

V.

477. Joint normal de la vis Saint-Gilles carrée. L'arête de douelle ab, $a'b'$ pouvant être considérée comme une tangente en a, rencontre en cc' le plan horizontal qui contient le centre de l'ellipse $m'an$, $m'a'n'$, directrice de la douelle.

La droite ao,$a'o'$ tangente à cette ellipse, rencontre le même plan horizontal au point o,o', d'où il résulte que la ligne $c'o'$ sera la trace horizontale du plan tangent en aa'; de sorte que $a'u'$, perpendiculaire sur $c'o'$, sera la projection horizontale de la normale. La projection verticale de cette même normale sera la droite au perpendiculaire sur ab, et par conséquent sur la trace verticale du plan tangent.

On construira de la même manière autant de plans tangents, et par suite autant de normales que l'on voudra, ce qui déterminera une surface normale que l'on peut prendre pour joint.

On peut obtenir les tangentes aux diverses sections de la voûte par les plans qui contiennent son axe, sans construire ces courbes. En effet, tous les points de tangence ayant des ordonnées égales, et toutes les ellipses provenant des sections par l'axe ayant même hauteur, toutes les projections de ces ellipses sur l'une des faces du mur de cage seraient égales au demi-cercle man, de sorte que les distances entre les centres

de ces projections et les points où les tangentes rencontreront leurs axes horizontaux seraient partout les mêmes, et tous ces points seront situés sur une même droite $ov, o'v'$, parallèle au plan vertical, contenant les centres de toutes les sections.

VI.

478. **Voûte d'arête rampante et en tour ronde.** Soit (*fig.* 7, *Pl.* 60) la section méridienne d'une vis Saint-Gilles ronde, pénétrée par un conoïde de manière à former une voûte d'arête représentée en plan (*fig.* 8). La voûte conoïde étant entièrement comprise entre les deux plans verticaux $a'a'$, $a'a'$, qui contiennent l'axe de la vis Saint-Gilles, cet axe sera l'une des directrices de l'intrados; et l'on prendra pour seconde directrice une courbe à double courbure ayant pour projection horizontale l'arc $c'c'$, et pour développement la demi-ellipse $c'''uuc'''$ (*fig.* 2). Pour construire cette courbe, on partagera (*fig.* 8) l'arc $3'$—$9'$, compris entre les plans verticaux 3—3, 9—9, en parties égales que l'on portera (*fig.* 2), sur la droite horizontale $3''$—$9''$. On fera la perpendiculaire $8''8'''$, égale à la différence de hauteur entre les points 4 et 8 et la droite $4''$—$8'''$ sera le développement de l'hélice parcourue par le centre du cercle $az'''za$ (*fig.* 7).

On fera (*fig.* 2) $4''c''$, $8''c''$, égales aux distances $4'c'$, $8'c'$ (*fig.* 8), puis on élèvera les perpendiculaires $c''c'''$, ce qui déterminera la droite $c'''c'''$, qui est l'un des diamètres conjugués de l'ellipse $c'''uuc'''$.

Le cercle $az'''za$ (*fig.* 7), étant partagé en autant de parties égales que l'on veut avoir de rangs de voussoirs, on

projettera tous les points de division sur le diamètre *aa*, et l'on partagera dans le même rapport la droite $c'''c'''$ (*fig.* 2). Enfin par chaque point de division de cette droite, on construira une ordonnée verticale, égale à l'ordonnée correspondante du cercle $az'''za$ (*fig.* 7). Cette opération déterminera l'ellipse $c'''uuc'''$, qui, enveloppée sur le cylindre dont la trace est $c'c'$ (*fig.* 8), devra servir de directrice à la surface conoïde.

Les points v, u, u, v (*fig.* 2), projetés sur l'horizontale $c''—c''$, et reportés de là sur l'arc $c'—c'$ (*fig.* 8), détermineront les arêtes de douelle de la voûte conoïde, et les intersections de ces lignes avec les hélices correspondantes de la vis Saint-Gilles détermineront les projections horizontales des arêtiers.

Surfaces de joint. Si on construit (*fig.* 2) la tangente *um* et l'horizontale $u'm$, cette dernière droite sera la projection de la tangente sur un plan horizontal pris à la hauteur que l'on voudra. Cette projection étant portée (*fig.* 8) de u' en m' sur la tangente au point u', on joindra m' avec le centre de la vis par la droite $m'—m$. Cette ligne avec la droite $a—a$ seront les deux directrices d'un paraboloïde hyperbolique tangent à la surface conoïde dans toute l'étendue de la droite $u—u$, de sorte que $u''—m''$ sera la projection horizontale de la tangente au point u'' milieu de l'arête de douelle comprise entre z' et le mur extérieur.

On prendra ensuite (*fig.* 4) un plan de projection perpendiculaire à la droite *uu* et par conséquent parallèle à la tangente $u''m''$ qui alors sera projetée sur ce plan par $u'''m'''$. La droite *uu* se projettera par un seul point u''', et la droite $u'''n$ perpendiculaire sur $u'''m'''$, sera la trace d'un plan contenant l'arête d'intrados *uu* et normal à la surface conoïde au

point u''. Ce plan formera le joint de la voûte pour la partie comprise entre l'arêtier et le mur extérieur.

On projettera (*fig.* 4) les hélices parcourues par les points r,z (*fig.* 7) et les intersections de ces lignes par $u'''n$, appartiendront à la petite courbe $z'r'$ (*fig.* 8), suivant laquelle le plan de joint $u'''n$ de la voûte conoïde, coupe la surface réglée formant le joint correspondant de la vis Saint-Gilles.

En projetant sur la figure 4 les hélices parcourues par les points irs, on déterminera la courbe $s'r'$, résultant de l'intersection du plan de joint $u'''n$ et de la surface réglée hélicoïde engendrée par l'horizontale si (*fig.* 7).

Pour projeter chaque hélice sur la figure 4, il suffira de trois points, et pour cela on tracera les horizontales 3,4,5,6, indiquant les hauteurs auxquelles les points r ou s parviennent successivement en traversant les plans méridiens 3, 4, 5, 6 (*fig.* 8) : la différence de hauteur de deux horizontales consécutives est égale à la quatrième partie de la verticale $8''8'''$ (*fig.* 2).

On devra construire les hélices parcourues par les milieux des lignes sr, rz, st, etc. Pour éviter la confusion, ces courbes n'ont pas été conservées.

On obtiendra le point u''' sur la figure 4, en faisant $i'u'''$ égal à zp (*fig.* 7).

Dans la partie de la voûte qui est comprise entre l'arêtier et le mur intérieur, on prendra pour joint le plan qui contiendrait l'arête de douelle uu et la normale au point u^{iv} à égale distance du mur et du point z''. On construira la tan-

gente $u^{IV}-m^{IV}$, dont la projection sur la figure 4 sera $u'''m^{V}$, et la droite $u'''n'$ perpendiculaire sur $u'''m^{V}$ sera la trace du plan de joint normal en u^{IV} et contenant l'arête de douelle uu. On projettera ensuite sur la figure 4, les hélices parcourues par les points z''', r''', s''' (*fig.* 7), et l'on déterminera comme précédemment, les deux courbes $z''r''$, $r''s''$ suivant lesquelles le plan de joint $u'''n'$ coupe le joint correspondant de la vis Saint-Gilles et la surface réglée engendrée par la droite horizontale $r'''s'''$ (*fig.* 7). On déterminera de la même manière tous les autres plans de joint de la voûte conoïde, ainsi que leurs intersections avec les joints correspondants de la vis Saint-Gilles.

On rencontrera dans la pierre dont la projection horizontale est désignée par la lettre B (*fig.* 8) une difficulté analogue à celle dont j'ai parlé n° 358, à l'occasion de la rencontre d'une descente avec un berceau horizontal. Ainsi on peut voir (*fig.* 5) que le joint vn de la voûte conoïde ne rencontrerait que très-loin la surface hélicoïde formant le dessus de la pierre; il pourrait même arriver que la rencontre de ces deux surfaces eût lieu à gauche de l'arête vv, et par conséquent dans l'espace vide formé par la voûte; dans ce cas, on adoptera une coupe telle que celle qui est représentée (*fig.* 12, *Pl.* 61).

Indépendamment des joints de la voûte conoïde et de la vis Saint-Gilles, nous devons encore construire les joints de tête des pierres de la vis. Pour y parvenir, on projettera toutes les hélices formant les arêtes des voussoirs sur un plan auxiliaire de projection (*fig.* 1), on coupera chaque rang de voussoirs par un plan perpendiculaire à l'hélice moyenne de la douelle. Ainsi pour obtenir la section T (*fig.* 8), on projettera les hélices passant par les points r, r''', z, z''' de la figure 7, etc., ainsi que les hélices moyennes, que l'on n'a pas laissées ici,

pour ne pas embarrasser l'épure. On déterminera h' en faisant (*fig.* 1) $i'h'$ égal à ih (*fig.* 7), le point h étant le milieu de l'arc zz, appartiendra à l'hélice moyenne de la douelle; on fera ensuite $h'2$ égal à deux fois le quart de la verticale $8''8'''$ (*fig.* 2), et $h''2$ égal à deux fois la distance d'un méridien à l'autre, prise sur le cercle $c'c'$ qui est la projection sur la figure 8 de l'hélice parcourue par le point h. Alors $h'h''$ (*fig.* 1) sera la tangente à l'hélice moyenne de la douelle pour la rangée de voussoirs formant la clef de la vis Saint-Gilles, et le plan $h'b$ perpendiculaire à cette tangente formera le joint de tête de la pierre. On déterminera de la même manière les projections horizontales de toutes les autres sections que l'on transportera ensuite sur l'épure partout où l'on jugera à propos d'indiquer un joint de tête.

VII.

Taille de la pierre. — Supposons, par exemple, que l'on veuille tailler la seconde pierre de l'un des arêtiers; on la projettera (*fig.* 3) sur un plan parallèle à sa plus grande longueur, et l'on déterminera les dimensions du parallélipipède capable de la contenir. Je suppose ici que l'on emploie la méthode indiquée n° 467, pour la taille d'un limon d'escalier.

On construira les deux panneaux C et C' suivant lesquels les deux plans dk, ly du parallélipipède coupent les deux cylindres concentriques, entre lesquels la pierre est comprise. On construira pareillement les panneaux D,D' contenant les pénétrations des diverses surfaces du voussoir, dans les plans

dl, *ky* du parallélipipède; ces panneaux étant appliqués sur les faces correspondantes, on taillera les deux surfaces cylindriques. On tracera ensuite dans ces cylindres les hélices engendrées par les points *s*, *p*, *æ*, *w* de la figure 7; et quand on aura taillé les surfaces réglées engendrées par les droites horizontales *sp*, *wæ*, la pierre aura la forme représentée figure 10, *Pl.* **61**.

On appliquera sur la surface cylindrique convexe le panneau E (*fig.* 6) qui est le developpement de la pénétration de la voûte conoïde et de ses surfaces de joint dans le cylindre droit dont la trace est *s'''s'''* (*fig.* 8).

On appliquera de même dans le cylindre concave le panneau de développement E', résultant de la pénétration de la voûte conoïde prolongée, dans le cylindre vertical *p'''p'''* (*fig.* 8, *Pl.* 60); les deux courbes *uv*, *uv* (*fig.* 10, *Pl.* 61) sur lesquelles on marquera les points de repère, serviront de directrices à la surface réglée formant la douelle de la voûte conoïde, et les deux courbes *us*, *us* avec l'arête de douelle *uu*, détermineront le plan de joint supérieur.

En déterminant ensuite (*fig.* 15) les points *x*, *e*, *z*, sur les génératrices correspondantes de la surface conoïde, on tracera l'arêtier; on évidera ensuite avec précaution la douelle de la vis Saint-Gilles; enfin on refouillera la pierre en dessous pour faire les joints inférieurs, ainsi que la surface hélicoïde formant le dessus de la première pierre, après quoi on fera le joint de tête en déterminant, à l'aide des deux projections 3 et 8, *Pl.* 60, la longueur véritable de la portion de chaque hélice comprise entre cette coupe et l'extrémité du parallélipipède primitif.

En résumé, voici dans quel ordre il faudra procéder :

1° *Tailler le parallélipipède capable;*

2° *Les deux cylindres concentriques entre lesquels la pierre est comprise;*

3° *Les deux surfaces hélicoïdes dessus et dessous la pierre;*

4° *La surface conoïde et le joint supérieur;*

5° *Tracer l'arêtier;*

6° *La douelle de la vis Saint-Gilles et le joint supérieur;*

7° *Les joints inférieurs de la voûte conoïde et de la vis Saint-Gilles.*

La figure 11, *Pl.* 61, contient les développements des pénétrations de la voûte conoïde et de ses surfaces de joint dans les deux cylindres concentriques formant le mur de cage, elle sert aussi à étudier le raccordement des pierres de la vis Saint-Gilles avec les assises horizontales du mur.

On devra construire pareillement les développements des cylindres concentriques qui contiennent les directrices de toutes les portions de conoïdes qui composent la voûte.

En disposant ces développements comme on le voit figure 14, *Pl.* 61, on aura l'avantage de vérifier tous les points qui doivent se trouver à la même hauteur.

VIII.

479. **Joints normaux.** — Nous avons eu déjà l'occasion de faire remarquer que dans la pratique on remplace souvent certaines surfaces déterminées par la théorie, par d'autres

surfaces qui diffèrent peu des premières, mais qui, par suite d'une génération plus simple, ne présentent pas les mêmes difficultés d'exécution. C'est ainsi que dans les conoïdes, l'arête d'intrados étant une ligne droite, on emploie pour surfaces de joint, un ou plusieurs plans différant aussi peu que l'on voudra des surfaces normales indiquées par la théorie. C'est donc uniquement comme sujet d'exercice que je proposerai la question suivante :

La figure 18, *Pl.* 62, est la projection horizontale d'une vis Saint-Gilles pénétrée par une voûte conoïde; mais au lieu d'employer, comme nous l'avons fait dans l'exemple qui précède, des plans pour surfaces de joint, nous prendrons des surfaces réglées normales à la surface conoïde dans toute l'étendue de l'arête d'intrados; de plus, les joints de la vis Saint-Gilles seront aussi des surfaces normales déterminées comme nous l'avons dit n° 475.

Nous allons commencer par cette partie de l'épure.

Joints de la vis Saint-Gilles. Le demi-cercle *yxzg* (*fig.* 17) étant la section méridienne de la vis Saint-Gilles, nous supposerons que l'on ne veut faire que deux joints, l'un passant par le point *x*, l'autre par le point *z*. On construira d'abord la droite *xb* tangente au demi-cercle *yxzg*, puis la droite *xd* tangente à l'hélice du point *x*. Ces deux tangentes détermineront le plan tangent *pq* et la normale *xn* qui sera la génératrice de notre surface de joint.

Cette opération terminée, on construira plusieurs positions de cette génératrice, en la faisant glisser sur deux hélices *xx'*, *ss*, et les points où ces lignes percent le plan méridien C*b* donneront la courbe *xe* (*fig.* 17).

On terminera cette courbe à l'endroit où elle rencontre l'horizontale *lk*, dont la hauteur dépendra du plus ou moins d'épaisseur que l'on voudra donner à la voûte; cette droite *lk* sera la génératrice de l'extrados.

Le joint du côté du noyau se déterminera comme celui du point *x;* mais pour ne pas embarrasser l'épure, les constructions nécessaires ont été faites à droite; ainsi *z'b'* est la tangente en *z'* à la section méridienne *y'x'z'g';* et *z'd'* est la tangente à l'hélice du point *z'*; ainsi, *p'q'* (*fig.* 21) est une horizontale du plan tangent, et *z'n'* est la normale que l'on fera glisser sur les deux hélices *z'z''*, *hh*. Enfin les points où ces différentes normales percent le plan méridien C*b'*, appartiennent à la courbe *z'c'*.

La normale du point *z'*, en tournant autour du noyau, touche constamment le cylindre vertical dont la trace est *hh;* l'hélice *h'h'* (*fig.* 17) est celle que parcourt le point de tangence. Toutes les fois que la normale arrive dans une position parallèle au plan méridien *bb'* sa projection verticale devient l'asymptote de l'une des courbes *fczf*, *f'c'z'f'*. Il en est de même de la normale *xn* qui, dans son mouvement, touche toujours le cylindre vertical, dont la trace est *ii* (*fig.* 18); lorsqu'elle arrive dans les plans parallèles à *bb'*, ses projections verticales sont les asymptotes des courbes *xe*, *x'e'*.

Joints de la voûte conoïde. Nous supposons ici, comme dans l'exemple 231, que l'on prenne pour directrice de la douelle, la courbe à double courbure dont la projection horizontale est l'arc de cercle *c'c'* (*fig.* 18), et qui a pour développement la demi-ellipse *cc* (*fig.* 22).

Après avoir mené à volonté (*fig.* 22) le plan horizontal *u'm'*, on prendra *u'm'* qui représente la projection horizontale de la

tangente, et l'on portera cette grandeur de u' en m' sur la tangente au point u' (*fig.* 18). On joindra m' avec C, et les deux droites horizontales Cu', Cm' seront les deux directrices du paraboloïde qui touche la surface de la voûte dans toute l'étendue de l'arête de douelle Cu'.

Le plan directeur de ce paraboloïde étant perpendiculaire à la droite Cu', on le prendra pour plan de projection, et on le supposera rabattu (*fig.* 16); l'arête de douelle Cu se projettera sur ce plan par un seul point u'', et l'horizontale Cm' aura pour projection $C''m''$. On construira sur le plan horizontal un certain nombre de droites parallèles à $u'm'$. Chacune de ces lignes sera la trace d'un plan perpendiculaire à l'arête de douelle, et qui contiendra une tangente et une normale; chaque tangente étant projetée sur la fig. 16, on lui mènera une perpendiculaire qui sera la projection de la normale correspondante; toutes ces tangentes et toutes ces normales aboutissent au point u'' qui est, comme nous l'avons dit, la projection de l'arête de douelle Cu', et toutes les tangentes s'appuient sur la droite $C''m''$ projection de Cm'; les droites u''—1, u''—2, u''—3 sont les normales à la voûte; leur ensemble formera la surface de joint correspondante à l'arête Cu'; la projection horizontale de chacune de ces normales se confond avec celle de la tangente qui lui correspond.

La surface de joint étant déterminée comme nous venons de le dire, il reste à faire deux opérations.

1° Déterminer l'intersection du joint normal de la voûte conoïde avec les surfaces réglées formant les joints normaux de la vis Saint-Gilles.

2° Construire l'intersection avec la surface réglée formant l'extrados de la voûte.

Nous allons commencer par chercher l'intersection du joint que nous venons de déterminer avec le joint de la vis Saint-Gilles, engendré par la normale *xn*. L'idée qui se présente d'abord serait (*Géométrie descriptive*) de couper ces deux surfaces réglées par un système de plans qui contiendraient les génératrices de l'une d'elles; mais on obtiendra de meilleures intersections en opérant comme je vais le dire.

On projettera sur la fig. 16, l'hélice $e''e''$ parcourue par le point *e* (*fig.* 17), nous avons vu comment il faut faire pour construire cette projection. On déterminera ensuite le point où cette hélice perce la surface réglée formant le joint de la conoïde; pour cela concevons (*Géom. descr.*) le cylindre horizontal projetant de l'hélice $e''e''$, sur le plan de la fig. 16, l'intersection de cette surface auxiliaire avec le joint normal de la conoïde se projettera (*fig.* 18), par une courbe tk'' dont la rencontre avec la circonférence ee''' projection horizontale de l'hélice du point *e* donnera e''' pour la projection horizontale du point cherché. On déterminera de la même manière le point a', suivant lequel l'hélice aa' du point *a* vient percer le joint de la voûte conoïde. On connaîtra donc la petite courbe $x'a'e'''$, qui résulte de l'intersection du joint normal de la vis Saint-Gilles par celui de la voûte conoïde. On construira de même la courbe $x''e''$ (*fig.* 18) provenant de l'intersection du même joint de la voûte conoïde avec le second joint de la vis Saint-Gilles. Enfin, en projetant (*fig.* 16) les hélices engendrées par plusieurs points de la droite *lk* (*fig.* 17), on construira la courbe $l''e'''C$, résultant de l'intersection du joint de la voûte conoïde avec la surface réglée formant l'extrados de la vis Saint-Gilles.

Les mêmes opérations serviront pour déterminer le second joint de la voûte conoïde ainsi que les intersections avec les surfaces de joint et d'extrados de la vis. La tangente vr'

(*fig.* 22), projetée (*fig.* 18) par $v'r'$ déterminera la seconde directrice du paraboloïde tangent qui est projeté (*fig.* 20); ainsi que la surface réglée formant le joint normal.

On remarquera qu'il existe une différence très-sensible entre les deux courbes $l''e''$C, $l'''e^{iv}w$, résultant de l'intersection de l'extrados de la vis Saint-Gilles, par les deux surfaces de joint de la conoïde.

La première de ces courbes vient rencontrer l'axe de l'escalier, tandis que la seconde, après s'être approchée du noyau, s'en éloigne sans l'avoir touché.

Cela provient de ce que la première surface de joint étant presque perpendiculaire à la direction de l'extrados rencontre toutes les hélices de cette surface, au nombre desquelles hélices il faut compter l'axe même de l'escalier; tandis que dans la seconde surface de joint de la voûte conoïde, les génératrices près du noyau s'abaissant, tandis qu'au contraire les hélices de cette partie de l'extrados s'élèvent, ces deux portions de surfaces inclinées dans le même sens finissent par ne plus se rencontrer, et la surface normale à la voûte conoïde se tourne en serpentant autour du noyau comme on le voit (*fig.* 18), sans jamais rencontrer l'hélice du point *k*. Ce résultat est tout à fait analogue à celui qui a été signalé n° 358, et l'on conçoit que si on voulait employer comme joint la surface dont nous venons de parler, il faudrait nécessairement y introduire quelques modifications, puisque le désir d'éviter les angles aigus formés par la douelle de la voûte conoïde et la surface de joint, conduirait à faire des angles extraordinairement aigus avec l'extrados, et qu'en outre la surface de joint, si on la conservait telle qu'elle est projetée (*fig.* 18), en tournant autour du noyau, en détacherait la pierre A, qui alors n'aurait plus aucun soutien.

Ce qu'il y aurait de mieux à faire dans ce cas serait de construire une surface normale à l'extrados, ou un plan perpendiculaire à l'hélice moyenne de cette surface. Alors le joint serait brisé de manière qu'une partie serait normale à l'intrados de la voûte, tandis que l'autre partie serait perpendiculaire à l'extrados.

Il pourrait se faire qu'il y eût un joint à l'endroit le plus élevé de la voûte conoïde (*fig.* 22). Dans ce cas le paraboloïde tangent se transformerait en un plan horizontal et le joint normal deviendrait un plan vertical.

LIVRE VII.

CHAPITRE PREMIER.

Questions diverses.

I.

480. **Arrière-Voussure de Marseille.** — La nature des surfaces qui forment la douelle de cette voûte la rend peu propre à être employée dans l'architecture moderne; mais la restauration de quelques édifices d'une époque antérieure peut fournir l'occasion de l'exécuter; d'ailleurs les difficultés assez grandes que présente cet exemple seront pour le lecteur un sujet d'exercice.

Avant d'entrer dans les détails d'épure, il est nécessaire de bien préciser la question que l'on se propose de résoudre; soit (*fig.* 546, *Pl.* **63**) la projection horizontale de la moitié de l'ouverture de la porte, l'espace à couvrir se compose de quatre parties.

1° Le rectangle $z'a'z'a'$, représentant l'ouverture de la porte, sera couvert par un cylindre circulaire ayant pour directrice l'arc az (*fig.* 545) ;

2° Le petit rectangle $z'u'u'v'$, est la projection horizontale de la feuillure formée par le cylindre uv ;

3° Le trapèze $v's'c'e'$ sera couvert par une surface réglée, ayant pour directrices *l'axe de la porte*, l'arc vs du cercle de feuillure, et l'arc ec nommé *arc de tête*, et situé dans la face apparente du mur ;

4° Enfin, le petit triangle $s'u'c'$, qui sera couvert par une seconde surface réglée, ayant comme la précédente pour directrices l'axe de la porte et le cercle de feuillure su, mais dont la troisième directrice sera une courbe uc, située dans le plan d'ébrasement $u'c'$.

Or, si l'on prenait arbitrairement les directrices ec, uc, les deux surfaces réglées se couperaient suivant une courbe à double courbure, dont l'effet désagréable détruirait la régularité de la douelle.

En introduisant cette condition que les deux courbes ec, uc, se coupent en un point c, on fait disparaître la courbe à double courbure, résultant de l'intersection des deux surfaces réglées. Mais cette courbe se trouve remplacée par une ligne droite sc, et la difficulté n'a fait que changer de nature. Il n'en existe pas moins dans la douelle un pli ou cassure d'un effet désagréable.

Les moyens d'éviter cet inconvénient dépendant des propriétés des plans tangents aux surfaces réglées, les constructeurs qui n'ont point étudié la géométrie descriptive se contentent de corriger après coup la douelle, en grattant la pierre

jusqu'à ce que la cassure ait disparu ; d'autres ont éludé la difficulté en remplaçant, comme nous l'avons fait *Pl.* 38, les surfaces réglées de l'arrière-voussure par un cône oblique contenant l'arc de tête 1—*d*, et le cercle de feuillure 4—*u*; dans ce cas, la douelle est continue, et l'arc d'hyperbole *ud* est la section du cône par le plan d'ébrasement.

Indépendamment de la difficulté dont il vient d'être parlé, il arrive quelquefois qu'après l'exécution, l'arrière-voussure n'est pas assez surhaussée, et que l'on est obligé d'abattre sur place tout ce qui gênerait le mouvement du vantail, et l'empêcherait de s'appuyer sur le plan d'ébrasement.

En résumé, si nous prenons pour définition l'énoncé des conditions auxquelles on a jusqu'à présent cherché à satisfaire, nous voyons que ces conditions se réduisent à trois :

1° Que la voûte soit assez surhaussée pour ne pas gêner le mouvement du vantail ;

2° Que la douelle soit formée de deux surfaces réglées ;

3° Que ces deux surfaces se raccordent de manière à former une surface unique et continue sans brisure ni jarret.

Nous allons voir les moyens de satisfaire à toutes ces conditions.

II.

Première opération. On remarquera d'abord que le vantail, dans son mouvement autour de l'arête verticale de la feuillure,

engendre une surface annulaire dont la section méridienne serait le quart du cercle *uv*.

On établira (*fig.* 543 et 544) les projections verticales et horizontales des cercles décrits par les différents points du vantail, et l'on construira une suite de plans contenant l'axe de la porte. On déterminera sur la projection horizontale (*fig.* 544) les courbes suivant lesquelles tous ces plans coupent la surface annulaire engendrée par le vantail.

Les droites 1—1, 2—2, 3—3, 4—4, tangentes à ces courbes, pourront être regardées comme les génératrices d'une surface réglée qui envelopperait la surface annulaire, et qui par conséquent ne pourrait pas gêner le mouvement du vantail.

On remarquera que la droite 7—7 n'est pas tangente à la section par le plan correspondant; il suffit que cette droite ne coupe pas la partie de courbe située dans l'angle *v'ur'*, au delà duquel ne s'étend pas le mouvement du vantail.

La surface réglée que nous venons de construire satisfait aux conditions énoncées plus haut; mais la forme des courbes *vr*, *ur*, suivant lesquelles elle pénètre dans le plan d'ébrasement et dans la face principale du mur, ne permet pas de l'adopter dans l'architecture.

On ne doit donc considérer cette surface que comme une première limite, en deçà de laquelle le mouvement du vantail serait infailliblement gêné.

III.

Deuxième opération. — La courbe *ur*, suivant laquelle la surface réglée précédente est coupée par le plan d'ébrasement, étant rabattue (*fig.* 545) en tournant autour de la verticale *un*, on prendra au-dessus de *r''* un point *c''*, que l'on ramènera en *c* sur la verticale *c'c*. Par ce point, qui forme l'angle de la porte, on construira l'arc de tête *ce*.

Cet arc, l'axe de la porte et le cercle de feuillure *vs*, seront les trois directrices de la surface réglée qui doit couvrir le trapèze *v's'c'e'* (*fig.* 546). On construira la droite *cs*, dirigée vers le centre *z'*, la droite *sn*, parallèle à la tangente *te*, et l'on joindra le point *n* avec *c''*, par la droite *nc''*. Si cette dernière ligne coupait la courbe *ur''*, il faudrait élever le point *c''* ou augmenter le rayon de l'arc de tête *ce*, ce qui élèverait le point *n*. Enfin on décrira une courbe qui touche en *u* et en *c''* les deux droites *un*, *nc''*, et qui soit tout entière comprise entre ces droites et la courbe *ur''* : on pourra prendre alors l'axe de la porte, le cercle de feuillure, et la courbe *uoc* pour directrices de la seconde surface réglée, projetée par le petit triangle *usc*, *u's'c'*.

La question sera complétement résolue. En effet, les deux surfaces réglées que nous venons de construire envelopperont évidemment la surface annulaire engendrée par le vantail, puisque les directrices *uc*, *ce*, sont plus élevées que les deux courbes *ur*, *ru* (*fig.* 543).

De plus, toute espèce de cassure aura disparu, et les deux surfaces se raccorderont dans toute l'étendue de la droite *sc*. Cela résulte d'un principe de géométrie descriptive que je vais rappeler.

Toutes les fois que deux surfaces réglées ont une génératrice commune, et qu'en trois points quelconques de cette génératrice on peut construire trois plans tangents communs, on pourra prendre dans chacun de ces trois plans une tangente quelconque; et la surface réglée qui aurait pour directrices ces trois tangentes sera touchée dans toute l'étendue de la génératrice commune par les deux premières surfaces, qui alors seront tangentes l'une à l'autre, et se raccorderont parfaitement.

Or les deux surfaces réglées que nous venons de construire sont dans ce cas, car la génératrice commune *sc* et l'axe de la porte déterminent à leur point de rencontre un plan tangent commun.

La ligne *sc* et la droite *hk*, tangente au cercle de feuillure, déterminent au point *s* un second plan tangent commun aux deux surfaces.

Enfin le plan contenant les deux parallèles *tc*,*sn*, sera tangent à la première surface réglée, puisqu'il contiendra les deux droites *ct*, *cs*, tangentes à cette surface; mais il touchera aussi la seconde surface réglée, puisqu'il contiendra les deux tangentes *cs*, *cn*.

Ainsi ces deux surfaces seront touchées dans toute l'étendue de la droite *cs* par un même *hyperboloïde à une nappe*, donc elles seront tangentes l'une à l'autre et se raccorderont.

481. Si l'on remplaçait l'arc de tête *ce* par une droite horizontale, la petite ligne *sn* serait pareillement horizontale, et le reste se ferait comme précédemment. Dans ce cas, la porte prendrait le nom d'*arrière-voussure de Montpellier*.

IV.

482. **Construction de l'arc d'ébrasement.** — Pour ne pas distraire l'attention, je n'ai pas parlé de la construction de la courbe $uo''c''$, l'une des directrices de la seconde surface réglée. Nous avons dit seulement que cette courbe devait être comprise tout entière entre la courbe ur'' et la ligne brisée unc'', et que de plus elle devait toucher la ligne verticale un au point u et la droite nc'' au point c''.

On peut satisfaire à ces conditions de plusieurs manières.

V.

483. **Première solution, courbes à deux centres.** — On choisira sur le prolongement de $z'u$ un point g tel que l'arc no'', décrit du point g comme centre, soit compris tout entier entre la courbe ur'' et la ligne brisée unc'', sans couper ni l'une ni l'autre de ces deux lignes. On portera le rayon ug sur $c''b$ perpendiculaire à la tangente nc''; on joindra le point g avec b par la droite gb, sur le milieu de laquelle on élèvera une perpendiculaire dont la rencontre avec $c''b$ donnera le centre d'un second arc $o''c''$, qui touchera le premier arc en o'' et la droite nc'' en c''. En effet, en nommant y le point de rencontre de $c''b$ avec la perpendiculaire sur le milieu de gb, et concevant que l'on ait joint yg, on aura $yb = yg$, et par conséquent $yb + bc'' = yg + go''$, puisque l'on a $go'' = gu = bc''$; donc le second arc tangent en c'' passera par o''; de plus il se raccordera

avec le premier arc, puisque si l'on menait en o'' une perpendiculaire à $o''g$, rayon du premier arc, elle serait aussi perpendiculaire à $o''y$, rayon du second arc: d'où il suit que les deux arcs auraient une tangente commune en o'', et se toucheraient en ce point.

VI.

484. Deuxième solution, courbe du deuxième degré. — Soient les deux tangentes un, nc (*fig.* 549), on construira la perpendiculaire cp et l'horizontale nq; on fera qv parallèle à cn, et l'on joindra vp; enfin l'on construira no parallèle à vp, ce qui déterminera le point o qui est le centre d'une ellipse, ayant son sommet en u, et touchant la droite nc au point c. Connaissant l'axe uo et le point c, il sera facile de construire la courbe.

Si l'on avait $cq = qp$, le point o serait à l'infini, et la courbe deviendrait une parabole.

Enfin, dans le cas où cq serait plus grand que qp, le point o serait à gauche du point u, et la courbe serait un arc d'hyperbole.

Démonstration. Le lecteur qui ne saurait pas l'algèbre peut passer toute cette partie sans inconvénient, en se contentant d'exécuter les constructions indiquées.

Soit

$$up = x',$$
$$cp = y',$$
$$un = m,$$
$$cq = y' - m = e.$$

La courbe demandée étant rapportée au sommet, son équation sera de la forme

$$(1) \qquad y^2 + px^2 + qx = 0,$$

dans laquelle il faut déterminer p et q.

Elle doit contenir le point c, dont les coordonnées sont x', y'; on aura donc

$$(2) \qquad y'^2 + px'^2 + qx' = 0.$$

La droite nc étant représentée par l'équation

$$(3) \qquad y = \delta x + m,$$

on exprimera qu'elle passe par le point c en posant

$$(4) \qquad y' = \delta x' + m.$$

En élevant au quarré les deux membres des équations (3) et (4), on aura

$$(5) \qquad y^2 = \delta^2 x^2 + m^2 + 2\delta m x,$$

$$(6) \qquad y'^2 = \delta^2 x'^2 + m^2 + 2\delta m x'.$$

Substituant ces valeurs dans les équations (1) et (2), il vient

$$\delta^2 x^2 + m^2 + 2\delta m x + px^2 + qx = 0,$$
$$\delta^2 x'^2 + m^2 + 2\delta m x' + px'^2 + qx' = 0.$$

Retranchant l'une de l'autre on obtient

$$\delta^2(x^2 - x'^2) + 2\delta m(x - x') + p(x^2 - x'^2) + q(x - x') = 0,$$

ou

$$\delta^2(x + x')(x - x') + 2\delta m(x - x') + p(x + x')(x - x') + q(x - x') = 0;$$

réduisant,

$$\delta^2(x+x')+2\delta m+p(x+x')+q=0;$$

équation dans laquelle x et x' sont les abscissses des points d'intersection de la courbe cherchée avec la droite nc.

En faisant $x=x'$, on exprime que la courbe est tangente à la droite, et l'on a

$$2\delta^2x'+2\delta m+2px'+q=0,$$

d'où l'on tire

$$(7) \qquad q=-2(\delta^2x'+\delta m+px').$$

Substituant cette valeur dans l'équation (2), on a

$$y'^2+px'^2-2(\delta^2x'+\delta m+px')x'=0;$$

en effectuant les calculs,

$$y'^2+px'^2-2\delta^2x'^2-2\delta mx'-2px'^2=0.$$

Remplaçant dans cette dernière équation y'^2 par sa valeur tirée de l'équation (6), il vient

$$\delta^2x'^2+m^2+2\delta mx'+px'^2-2\delta^2x'^2-2\delta mx'-2px'^2=0;$$

réduisant,

$$-\delta^2x'^2+m^2-px'^2=0;$$

d'où l'on tire

$$p=\frac{m^2-\delta^2x'^2}{x'^2};$$

mais (4)

$$\delta=\frac{y'-m}{x'}=\frac{e}{x'},$$

donc

$$\delta^2=\frac{e^2}{x'^2},$$

et par conséquent

$$\delta^2x'^2=e^2;$$

substituant dans la valeur de p, on aura

$$p=\frac{m^2-e^2}{x'^2}.$$

Portant ces valeurs de δ, δ^2, et de p dans l'équation (7), et rappelant que $m+e=y'$, on obtient

$$q=-\frac{2m(m+e)}{x'}=-\frac{2my'}{x'}.$$

Enfin les valeurs de p et de q étant portées dans l'équation (1), on a pour l'équation de la courbe

$$y^2+\frac{m^2-e^2}{x'^2}x^2-\frac{2my'}{x'}x=0.$$

$m>e$ donne une ellipse,
$m=e$ une parabole,
$m<e$ une hyperbole,
$m^2-e^2=x'^2$ un cercle.

Faisant $y=0$, on aura

$$\frac{m^2-e^2}{x'^2}x^2-\frac{2my'}{x'}x=0.$$

D'où l'on tire pour les extrémités de l'axe $2a$:

$$x=0,$$

$$x=2a=\frac{2my'x'}{m^2-e^2}=\frac{2my'x'}{(m+e)(m-e)}=\frac{2mx'}{m-e}.$$

Enfin,

$$a=\frac{mx'}{m-e},$$

qui donne la construction de la fig. 549.

Lorsque $m=e$, a est infini ; ce qui donne une parabole. Si $m<e$, a est négatif, et la courbe est une hyperbole.

VII.

485. **Biais passé.** Cette question a déjà été résolue (365).

On se propose de couvrir par une petite voûte le passage oblique compris entre les pieds-droits A et B (*fig.* 551). Pour que la poussée agisse dans le sens de la longueur du mur, on fera passer les plans de joints par la droite *mn*, perpendiculaire à cette direction ; mais au lieu d'employer, comme dans l'exemple du numéro 365, un berceau cylindrique, on prendra pour la douelle une surface réglée ayant pour directrices : 1° la droite *mn* perpendiculaire aux faces du mur ; 2° les deux cercles *aoc*, *zux*, parallèles au plan vertical de projection. Il résulte de ces données que les arêtes de douelle sont des lignes droites au lieu d'être des arcs d'ellipse comme dans l'exemple (365) ; mais cet avantage peu important est loin de compenser l'irrégularité de cette voûte, au milieu de laquelle se trouve une bosse ou gonflement de l'effet le plus désagréable.

La fig. 552 contient le rabattement des panneaux de joints, et la fig. 553 représente la pierre, dont la taille ne présente aucune difficulté.

VIII.

486. **Arrière-voussure de Saint-Antoine.**—Nous n'avons employé jusqu'à présent que des surfaces dont les génératrices

constantes dans leurs formes étaient assujetties à s'appuyer sur des lignes données; mais on fait encore usage de surfaces dont la génératrice varie pour chacune de ses positions, en satisfaisant à certaines conditions.

Les exemples qui suivent sont dans ce cas.

487. La fig. 554, *Pl.* 64, étant la projection horizontale d'une porte, l'espace à couvrir se compose de trois parties, savoir :

1° L'espace rectangulaire $a'a'c'c'$, compris entre les pieds-droits, et couvert par la plate-bande ac (*fig.* 555);

2° Le petit rectangle $v'v'u'u'$, qui représente la feuillure;

3° Enfin le trapèze $v'z'u'x'$, couvert par une surface courbe raccordant la droite horizontale vu, qui est l'arête supérieure de la feuillure, avec le demi-cercle zox, situé dans la face verticale du mur.

Pour engendrer cette surface, on concevra que la courbe zox se meut en s'avancant parallèlement aux faces du mur, mais qu'au lieu de rester constant, le diamètre horizontal diminue de manière à être toujours compris entre les deux côtés obliques du trapèze $v'z'u'x'$, tandis que le rayon vertical sera égal aux ordonnées successives de l'ellipse $s''o''$ (*fig.* 556), qui représente la section de la voûte par le plan vertical contenant l'axe de la porte. Ainsi lorsque la courbe génératrice sera parvenue dans le plan vertical pq, elle sera transformée dans l'ellipse 2—2, dont le diamètre horizontal se déduira de la figure 554, et le rayon vertical de la fig. 556; enfin la génératrice sera réduite à une ligne droite lorsqu'elle arrivera dans le plan vertical contenant les arêtes de la feuillure.

Les joints seront des surfaces cylindriques, ayant pour directrices des courbes à deux centres, ou du second degré, perpendiculaires à la droite *vu* et au demi-cercle *zox*.

Taille. La pierre se taillera sur le panneau de projection verticale A (*fig.* 555). Quand on aura fait les surfaces cylindriques des joints, on y appliquera les panneaux développés (*fig.* 557); enfin, on taillera la douelle au moyen de plusieurs cerces découpées sur le contour des ellipses 1—1, 2—2, 3—3 (*fig.* 555), en ayant le soin de faire coïncider ces cerces avec les points de repère marqués sur les contours des panneaux de développement de la fig. 557.

IX.

488. **Autre exemple d'arrière-voussure.** — Pour éviter les difficultés de *l'arrière-voussure de Marseille réglée*, on a quelquefois employé un mode de génération analogue à celui que nous venons d'indiquer.

Soit (*fig.* 561) la coupe des pieds-droits par le plan de naissance, on décrira l'arc de cercle ac'' avec un rayon au moins égal à celui du vantail. Cet arc, ramené dans le plan d'ébrasement, aura pour projection verticale l'arc d'ellipse *ac*. Construisons ensuite l'arc de tête *ce* avec un rayon arbitraire, et ajoutons pour condition que la section par le plan vertical, contenant l'axe de la porte, soit une courbe, ou une ligne droite *ou*, $o'u'$, rabattue sur le plan horizontal en $o'u'''$.

Pour former la surface de douelle, concevons une suite de plans 1—1, 2—2, etc., parallèles au plan vertical de pro-

jection; chacun de ces plans coupera les lignes *ac*,*ou*,*ve*, en trois points, par lesquels on fera passer un arc du cercle, et la surface qui contiendra tous ces arcs de cercle sera la douelle de la voûte.

Les plans de joint contenant l'axe de la porte, les arêtes de joint se projetteront sur le plan vertical par des droites, et sur le plan horizontal par des courbes faciles à construire.

La taille des pierres se fera comme au n° 409.

CHAPITRE II.

Lignes de courbure.

I.

489. **Définition.** — Si par un point d'une surface courbe on construit un plan normal, et que l'on fasse tourner ce plan autour de la normale, il coupera la surface suivant une ligne dont la courbure variera pour chaque position. On démontre par le calcul que celle de ces courbes qui, vers le point donné, a le plus petit rayon de courbure, est toujours perpendiculaire à celle qui a le plus grand rayon.

D'après cela, si l'on conçoit que le point donné se mette en mouvement sur la surface, en se dirigeant constamment suivant la ligne de plus petite courbure, la courbe parcourue coupera à angle droit toutes les lignes de plus grande courbure; de sorte que l'ensemble des lignes de plus petite et de plus grande courbure formera sur la surface un réseau composé de quadrilatères, dont les côtés quoique courbes, se couperont partout à angles droits, et seront, par conséquent, dans les conditions les plus convenables pour former les arêtes de douelle d'une voûte.

De plus, si l'on prend ces courbes pour directrices de

surfaces normales qui formeraient les joints de la voûte, ces surfaces seront développables.

On n'a pas encore trouvé de méthode graphique simple et générale pour construire les lignes de courbure sur une surface courbe quelconque. Heureusement la question est résolue pour le cas particulier de presque toutes les surfaces employées comme douelle dans la coupe des pierres.

Ainsi, sur toutes les surfaces cylindriques les génératrices et les sections droites sont évidemment les lignes de plus grande et de plus petite courbure.

Sur le cône, ce sont les génératrices et les courbes dont tous les points sont à égale distance du sommet; sur le cône circulaire, les lignes de plus petite courbure sont des cercles parallèles à la base.

Sur toutes les surfaces de révolution, et par conséquent sur la sphère, les lignes de plus grande et plus petite courbure sont les sections méridiennes et les parallèles.

Il ne reste donc plus que quelques surfaces rarement employées, et sur lesquelles il sera facile de déterminer, approximativement, le système d'appareil le plus convenable. Cependant, pour compléter autant que possible les idées à cet égard, je terminerai ce sujet par l'exposé du beau résultat d'analyse obtenu par Monge dans la recherche des lignes de courbure de l'ellipsoïde à trois axes.

(Voir pour la démonstration le deuxième cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, ou le *Traité d'Analyse* de Monge.)

II.

490. **Voûte elliptique à trois axes.** — Soit (*fig.* 562, *Pl.* 65) la coupe d'une voûte par le plan de naissance. On veut couvrir cet espace par une surface ellipsoïde, ayant pour grand axe la droite AA, perpendiculaire au plan vertical de projection, pour axe moyen la droite BB, et pour demi petit axe la verticale sC (*fig.* 563).

La section horizontale (*fig.* 562) contient le grand axe et l'axe moyen.

La fig. 563 représente la section par le plan qui contient le moyen et le petit axe.

Enfin la section (*fig.* 564) contient le grand axe et le petit.

Sur les deux fig. 562 et 563, les projections des lignes de courbure sont des ellipses et des hyperboles, et l'on remarquera que les lignes qui se projettent par des ellipses sur la fig. 562 ont des hyperboles pour projection sur la fig. 563, et réciproquement; de plus, toutes ces courbes se projettent par des ellipses sur le plan du grand et du petit axe (*fig.* 564).

Toutes ces lignes viennent tourner autour de deux points *o*, *o*, dont elles se rapprochent sans jamais les atteindre.

Monge donne à ces deux points le nom d'*ombilics*.

Si le petit axe augmentait, les ombilics se rapprocheraient

des extrémités du grand axe, et se confondraient avec ces extrémités dans le cas où le petit axe serait égal au moyen. Alors l'ellipsoïde deviendrait de révolution, les ellipses de la projection 562 passeraient toutes par les points A et A, et les arcs d'hyperboles se changeraient en des lignes droites, qui seraient les projections des parallèles de la surface.

III.

491. **Construction des lignes de courbure.** — Le point x étant l'un des foyers de la section (*fig.* 562), y celui de la section 563, et z celui de la section 564, ces foyers sont tous situés dans le plan du grand axe et de l'axe moyen; x et z sont sur le grand axe et y sur l'axe moyen.

On ramènera x et z sur l'axe moyen sB (*fig.* 562), en les faisant tourner autour du point s. On joindra z avec A, et la parallèle xo parallèle à zA déterminera l'ombilic o.

On ramènera ensuite le foyer y sur le grand axe sA; on joindra y avec B, et la droite xp parallèle à yB déterminera le point p. Les deux droites so, sp, seront les axes d'une ellipse op et d'une hyperbole oh, qui suffiront pour construire toutes les courbes de la projection (*fig.* 562). La droite sb sera l'une des asymptotes de l'hyperbole oh.

Les deux coordonnées d'un point de l'ellipse op seront les axes de l'une des hyperboles de la projection 562, et les deux coordonnées d'un point de l'hyperbole oh seront les axes de l'une des ellipses de la même projection.

Des relations analogues auront lieu sur les deux autres pro-

sur l'ellipse ACA les points qui sont dans le voisinage de l'ombilic.

Ainsi les sommets des ellipses de la figure 563 étant ramenés sur la courbe ACA (*fig.* 564), on en déduira les sommets des hyperboles de la figure 562, et réciproquement les sommets des ellipses de cette figure étant ramenés sur la courbe ACA, feront connaître les sommets des hyperboles de la figure 563.

Voici donc en résumé l'ordre des constructions :

1° Les ellipses de la figure 562 ;

2° Les ellipses de la projection 563 ;

3° Toutes les ellipses de la figure 564, en vérifiant surtout, comme nous l'avons dit, les intersections de ces courbes avec l'ellipse ACA ;

4° Les hyperboles de la figure 562 ;

5° Les hyperboles de la figure 563.

On remarquera que toutes les ellipses de la figure 564 sont inscrites dans un losange, dont le côté serait la corde du quart d'ellipse *qv*.

Si l'on voulait exécuter cette voûte, il faudrait, dans le voisinage de l'ombilic, supprimer quelques joints, et réunir plusieurs pierres en une seule ; on voit, par les lignes de points conservées sur l'épure, que sans cette précaution les pierres n'auraient pas assez d'épaisseur, et cet inconvénient est d'autant plus grave qu'à cette place les joints sont très-contournés.

En adoptant le système de lignes de courbure que nous venons de construire, le reste du travail serait encore fort long : le lecteur pourra en faire un sujet d'exercice.

IV.

492. **Surfaces normales.** — En construisant les tangentes aux deux courbes qui se croisent en un point quelconque de la voûte, on déterminera le plan tangent, et par suite la normale.

La même opération étant répétée pour chaque point, on aura les surfaces normales formant les joints.

On cherchera ensuite les intersections de ces surfaces avec l'extrados, et l'on construira leur développement.

Taille. On préparera la pierre sur le contour de la projection horizontale et l'on dressera les deux plans horizontaux entre lesquels elle est comprise. Les courbes suivant lesquelles ces plans sont coupés par le prolongement des joints, serviront de directrices à ces surfaces que l'on taillera, et sur lesquelles on appliquera les panneaux de développement de joints, à l'aide desquels on tracera les arêtes de douelle et d'extrados. Enfin ces dernières surfaces se tailleraient par des cerces elliptiques, que l'on obtiendra en faisant des sections parallèles aux plans de projection.

CHAPITRE III.

Ponts biais.

I.

493. **Définitions.** — Dans la construction des chemins de fer, la nécessité de s'assujettir à certaines pentes ou courbes déterminées, conduit souvent à traverser obliquement des routes ou des canaux, dont il est presque toujours impossible de changer la direction primitive, et les ponts qu'il faut construire, dans ce cas, ont reçu le nom de *pont biais*.

La douelle de ces sortes de voûtes est toujours une surface cylindrique, circulaire ou elliptique suivant les circonstances; mais lorsque l'inclinaison du berceau, par rapport aux plans qui contiennent les arcs de tête, est très-grande, on ne peut plus employer l'appareil ordinaire des cylindres. Or nous avons vu, dans le chapitre précédent, que les lignes de joints les plus convenables pour l'appareil d'une voûte étaient celles de plus grande et de plus petite courbure, d'où il résulte que, dans un berceau cylindrique, on prend ordinairement les génératrices et les sections droites pour arêtes d'intrados; mais dans le cas actuel, cette disposition présenterait des inconvénients graves.

En effet, si l'on employait pour surfaces de joints, des plans normaux passant par les génératrices du cylindre, les pressions de toutes les parties de la voûte sur ces plans se composeraient (*fig.* 4, *Pl.* 66) suivant deux résultantes *p* et *q*, perpendiculaires à la direction du berceau, et qui tendraient évidemment à renverser les angles aigus A et B des pieds-droits; or c'est précisément cette *poussée au vide* qu'il faut tâcher d'éviter.

Cette question nous a déjà occupé aux n°s 365 et 485, mais il ne s'agissait alors que d'une étude géométrique, tandis qu'ici le problème se présente accompagné de circonstances pratiques de la plus grande importance.

Je ferai remarquer d'abord, que dans l'exemple du numéro 365, la douelle est une surface cylindrique, et les arêtes de joints sont des arcs d'ellipse; tandis qu'au n° 485, la douelle est une surface réglée, et les arêtes de joints sont des droites.

Mais la nature de la douelle et des lignes de joints n'a ici qu'une importance secondaire; ce qui était beaucoup plus essentiel, c'était de ramener la direction de toutes les forces, qui agissent sur la voûte, dans un plan parallèle aux têtes du berceau. C'est pourquoi nous avions fait passer les plans de joints par une droite perpendiculaire à la direction du mur traversé par le cylindre oblique.

Dans les deux exemples que nous venons de rappeler, les arêtes de douelle font des angles très-aigus avec les faces de têtes, et de plus, les surfaces de joints ne sont pas partout normales à la douelle.

Voyons s'il serait possible d'éviter une partie de ces inconvénients.

II.

494. **Appareil orthogonal.** — L'exclusion des génératrices du cylindre comme lignes de joints, entraîne nécessairement comme conséquence celle des sections droites, qui d'ailleurs ne pourraient pas être employées dans le voisinage des têtes qu'elles couperaient suivant des angles excessivement aigus.

495. **Arêtes de douelle.** — La nécessité d'employer des arêtes d'intrados qui ne rencontrent pas les arcs de tête de la voûte, a engagé les constructeurs de ponts biais à remplacer les sections droites du cylindre par les courbes parallèles à la direction du chemin.

496. Ce premier système de lignes étant adopté, concevons l'arc de tête partagé en voussoirs, et supposons que tous les points de division se mettent en mouvement sur la surface du cylindre de manière que la courbe décrite par chacun d'eux traverse partout, à angle droit, les lignes de joints du premier système. On obtiendra, par ce moyen, un second système de lignes, qui, avec le premier, remplira les conditions les plus favorables pour former les arêtes d'intrados, puisque, comme les lignes de plus grande et de plus petite courbure, elles partageront toute la surface de la voûte en quadrilatères rectangles.

C'est en cela surtout que consiste le système que l'on nomme *orthogonal.*

497. La construction du second système de joints est fort simple, et dépend de ce principe de géométrie descriptive :

Que *la projection d'un angle droit est un angle droit lorsque l'un des côtés de cet angle est parallèle au plan de projection.*

Or la courbe cherchée, à laquelle on donne le nom de *trajectoire*, devant couper à angle droit toutes les sections parallèles aux têtes, doit par conséquent être partout perpendiculaire à la tangente au point de rencontre des deux courbes, et si l'on prend (*fig.* 2) un plan de projection parallèle aux sections *vu* du berceau, la projection verticale *ab* de la trajectoire devra être perpendiculaire à la projection *mn* de la tangente, qui passe par le point de rencontre des deux lignes de joints.

Nous pouvons donc adopter la construction suivante.

498. Concevons (*fig.* 1) un cylindre horizontal, incliné comme on voudra par rapport au plan vertical de projection, et supposons que les sections parallèles aux têtes soient des cercles ou des arcs de cercles qui auraient pour centre les points 0, 1, 2, 3, etc., il s'agit de construire par le point *a* la courbe qui couperait tous ces cercles à angle droit.

On tracera successivement les rayons *a*—*o*, *c*—1, *e*—2, *u*—3, et l'on ne conservera de ces rayons que les parties *ac*, *ce*, *eu*, ce qui donnera pour résultat la courbe *aceu*.....*x*.

En effet, il résulte de ce que nous avons dit que *ac* sera perpendiculaire sur la circonférence qui a son centre au point *o*. *ce* sera perpendiculaire à celle qui a son centre au point 1, etc. ; de sorte que la courbe composée de toutes ces petites droites, sera sensiblement perpendiculaire à tous les cercles donnés.

499. La construction précédente n'est pas d'une exactitude absolue. En effet, dans toute solution graphique, comme dans le calcul, on admet une certaine limite en deçà de la-

quelle les erreurs d'approximation sont insignifiantes et peuvent être négligées sans inconvénient ; mais il faut éviter, autant que possible, que ces erreurs soient dans le même sens, et surtout qu'elles soient de nature à s'ajouter. Or c'est précisément ce qui a lieu ici.

En effet, la partie *ac* ne doit pas être une droite, mais une portion de courbe qui coupe à angle droit, non-seulement le premier cercle, mais encore le second, d'où il résulte que le point *c* est un peu trop bas. Or l'erreur qui existe dans la position du point *c*, se combinera avec l'erreur dans le même sens qui résulte de ce que *ce* est une droite perpendiculaire seulement au second cercle, au lieu d'être une partie de courbe perpendiculaire en même temps au deuxième et au troisième. Enfin ces deux erreurs se combineront avec la troisième, et ainsi de suite, de sorte que la position du dernier point dépendra de la combinaison de toutes les erreurs précédentes.

500. Les erreurs dont nous venons de parler peuvent être réduites autant que l'on voudra, de plusieurs manières. En effet, nous venons de voir que les points *c*, *e*, *u*, sont tous un peu trop bas. Or, si l'on traçait successivement *a*—1, *c'*—2, *e'*—3, etc., on obtiendrait une seconde courbe *ac'e'u'....x'*, dans laquelle les points *c'*, *e'*, *u'*, *x'* seraient un peu trop haut. De sorte qu'une courbe qui partant du point *a*, passerait par les milieux des petits arcs *cc'*, *ee'*, *uu'*, *xx'*, etc., serait très-près de satisfaire aux conditions demandées.

501. Il est d'ailleurs évident que la courbe cherchée est la limite avec laquelle doivent coïncider les polygones *ax*, *ax'*, lorsque le nombre de leurs côtés devient infini ; d'où il résulte qu'en augmentant le nombre des cercles donnés, on approchera de l'exactitude autant que l'on voudra.

Ainsi, par exemple, les arcs cc', ee', etc., étant toujours plus grands que les erreurs commises dans la position des points de la courbe cherchée, on pourra en augmentant le nombre des cercles donnés, réduire ces erreurs au-dessous de telle quantité que l'on voudra. Enfin, on peut opérer de la manière suivante : on tracera successivement a''—6, c''—7, e''—8, etc ; les points 6, 7, 8 étant pris à égale distance des points 0, 1, 2, 3, 4.

502. Si l'on pensait qu'il fût nécessaire de pousser l'exactitude au delà de ce que l'on peut obtenir par une construction graphique exécutée avec soin, il faudrait avoir recours au calcul, et, dans ce cas, je renverrais au mémoire dans lequel M. Lefort a donné l'équation de la trajectoire demandée, (*Annales des ponts et chaussées*, mai et juin 1839).

503. La première idée de cette méthode est donc due à cet ingénieur, et voici dans quelles circonstances je fus conduit à m'occuper de la même question.

Quelques-uns des appareilleurs employés à la construction des ponts biais du chemin de fer de Versailles vinrent me trouver, pensant que je pourrais leur donner quelques explications sur le travail dont ils étaient chargés et qu'ils ne comprenaient pas bien.

Je n'avais pas l'honneur de connaître M. Lefort, et j'aurais craint de commettre une indiscrétion en lui demandant une solution qui était sa propriété. Ensuite, quand j'aurais connu alors le mémoire inséré en 1839 dans les *Annales des ponts*, je n'aurais pas pu le faire comprendre à des ouvriers entièrement étrangers au langage algébrique. J'ai donc dû chercher à résoudre la même question par la géométrie descriptive. Je ne crois pas d'ailleurs qu'il soit bien nécessaire d'employer l'algèbre supérieure pour construire une courbe que l'on peut obtenir

si facilement avec le compas, et de calculer avec quatre et cinq chiffres décimaux des ordonnées que, dans la pratique, on est presque toujours obligé d'augmenter ou de raccourcir pour raccorder la courbe avec les joints des voussoirs des têtes. L'exactitude extrême que l'on veut obtenir par le calcul est d'ailleurs inutile dans le cas actuel, car la solidité d'une voûte dépend moins du tracé rigoureusement théorique des lignes d'appareil que du choix des surfaces de joint sur lesquelles agissent les pressions, et c'est précisément la partie du problème qui ne me paraît pas encore suffisamment étudiée.

504. Il résulte des opérations par lesquelles nous avons obtenu la trajectoire, figure 1, 5 et 6, que toutes les trajectoires sont identiques. De sorte que l'une d'elles étant obtenue, il suffira de la faire avancer ou reculer sur le cylindre pour avoir toutes les autres.

Ainsi, par exemple, quand on aura construit la trajectoire ax, il suffira de faire avancer chaque point d'une quantité aa', pour obtenir la trajectoire $a'x'$.

505. Au lieu de prolonger cette courbe jusqu'au point a', on peut la terminer par une tangente be normale à la courbe qui forme la directrice du cylindre d'extrados.

III.

506. **Construction des surfaces normales.** — La droite qui touche en u le cercle cao (*fig.* 5) est parallèle au plan vertical de projection et sera par conséquent parallèle à la trace verticale du plan tangent, d'où il résulte que le rayon vu sera la projection verticale de la normale au point u.

La projection horizontale *vu* de cette même normale (*fig.* 6) sera perpendiculaire à la droite *hk* qui est évidemment parallèle à la trace horizontale du plan tangent.

Il sera donc facile de construire autant de normales que l'on voudra par tous les points des deux courbes *cao*, *xaz*.

Ces normales étant projetées (*fig.* 7) sur le plan de la section droite, on les prolongera jusqu'à la courbe *psq*, qui est la trace du cylindre formant l'extrados de la voûte.

Ainsi, le point n'' projeté en *n* (*fig.* 6 et 5) appartient à la courbe *ysg*, suivant laquelle le cylindre d'extrados est rencontré par la surface normale qui a pour directrice le demi-cercle *cao*. On construira de la même manière tous les points de la courbe *msr*, provenant de l'intersection de l'extrados par la surface normale, qui a pour directrice la trajectoire *xaz*.

507. On remarquera que les deux points *u*, u' (*fig.* 5 et 6) étant à la même hauteur, les normales passant par ces points auront une projection commune sur la figure 7, de sorte que les points *n*, n' étant aussi à la même hauteur, ils pourront être déterminés par une seule opération, ce qui permettra de construire en même temps les deux courbes *ysg*, *msr*.

508. La projection verticale de la courbe *msr* fait un anneau tandis que la projection de la trajectoire *xaz* a un point de rebroussement en *a*.

509. La figure 8 contient les développements de deux cylindres d'intrados et d'extrados.

La courbe $a'''z''$ est le développement de la trajectoire. Il sera nécessaire que ce développement soit construit avec exactitude, et pour cela on devra s'assurer que tous les points projetés sur le plan de la section droite (*fig.* 7) sont bien à la

même hauteur que les projections des mêmes points sur la figure 5.

IV.

510. **Surfaces de joints.** — Il est essentiel de remarquer que la projection $v'u'n'$ de la normale sur le plan de la figure 5 se confond avec celle du rayon $m'u'$, tangent à la projection de la trajectoire. En effet, soit (*fig.* 11) *cao*, $c'o'$, les projections de la section circulaire parallèle aux têtes du berceau; la droite tu, $t'u''$ tangente à cette courbe sera parallèle au plan vertical de projection, et par conséquent à la trace verticale du plan tangent en u, d'où il résulte que la projection verticale vn de la normale doit se confondre avec le rayon um du cercle *cao*.

511. Ainsi (*fig.* 5) les projections verticales des normales à la voûte se confondront avec celles des tangentes à la trajectoire, d'où il résulte que le cylindre projetant de cette courbe sera tangent à la surface réglée normale.

De plus, ces deux surfaces différant très-peu l'une de l'autre dans les limites déterminées par l'épaisseur de la voûte, il sera permis de remplacer la surface normale par le cylindre projetant de la trajectoire.

512. Cette dernière surface, indépendamment de la simplicité de sa génération, satisfait de la manière la plus complète aux conditions de stabilité; car il est évident que les forces provenant de la pression exercée sur les joints par le poids des assises supérieures se composeront, dans le cas actuel, comme si elles agissaient sur des plans tangents au cylindre projetant de la courbe *ax* (*fig.* 9 et 12), et la résultante de toutes les pressions qui ont lieu sur les joints longitudinaux, sera par conséquent ramenée dans un plan parallèle aux têtes.

513. M. de la Gournerie, dans un mémoire inséré aux *Annales des ponts* (juillet et août 1851), et M. Graœft (juillet et août 1852) ne pensent pas que le *lit* d'une voûte biaise puisse en aucun cas être perpendiculaire sur les plans de têtes. M. de la Gournerie, après avoir reconnu, comme nous venons de le faire, que les plans tangents à la surface normale suivant les différents points de la trajectoire, sont perpendiculaires aux plans des têtes, ajoute, page 111 : « Les plans tangents aux autres » points d'un *lit* ne sont pas perpendiculaires aux plans de » têtes. Dans aucun appareil d'arche biaise, cette perpendicu- » larité ne peut être établie pour tous les points de la surface » des *lits* : il faudrait pour cela *que les lits pussent être des* » *cylindres perpendiculaires aux têtes, ce qui est impossible.* »

Il conclut de là que, dans une arche biaise, il y a toujours une poussée au vide *très-faible avec l'appareil orthogonal.*

514 Cette dernière remarque devient évidente, si l'on jette un coup d'œil sur la figure 5, où l'on peut facilement reconnaître, comme nous l'avons déjà dit, le peu de différence qui existe entre la surface normale comprise entre les deux courbes *az* et *n'r* et le cylindre projetant de la première ; d'où il résulte que la poussée au vide sera complétement détruite si l'on remplace la surface normale par le cylindre projetant de la trajectoire.

515. Il n'est donc pas exact de dire que, *dans une arche biaise, il est impossible que les lits soient des cylindres perpendiculaires aux têtes.*

Sans doute cela serait *impossible* si l'on était absolument forcé d'employer la surface normale comme *lit*. Mais cette obligation n'existe pas : M. de la Gournerie sait très-bien qu'il est non-seulement permis, mais très-souvent utile dans la pratique, de remplacer les surfaces normales indiquées par la théorie par d'autres surfaces qui en diffèrent peu, mais dont

la génération moins composée permet d'obtenir plus d'exactitude dans la taille, et d'augmenter par conséquent la solidité de la construction.

Il est donc évident que l'impossibilité dont M. de la Gournerie a parlé plus haut doit s'entendre *des surfaces normales et non des lits* qui, dans les arches biaises, et surtout avec l'appareil orthogonal, peuvent très-bien être des *cylindres perpendiculaires aux têtes*.

516. D'ailleurs le but que l'on se propose principalement dans l'emploi des surfaces normales étant d'éviter les angles aigus formés par la rencontre des joints avec la douelle, il est évident que l'on pourra fort souvent satisfaire à cette condition en remplaçant la surface normale par une autre surface qui lui serait tangente suivant l'arête d'intrados (*fig.* 2), et lorsque la surface normale est inclinée de manière à diriger la résultante des pressions vers les points où la résistance est insuffisante, il faut nécessairement chercher d'autres moyens de solution.

517. Ainsi, par exemple, la surface normale *cyog* (*fig.* 6) aurait évidemment pour résultat d'augmenter la poussée au vide.

En effet, supposons que l'on ait transporté cette surface de la figure 6 à la figure 14, il sera facile de reconnaître que, par suite de la différence qui existe dans le sens de l'inclinaison des deux parties A et A', les pierres posées en A tendront à glisser dans le sens indiqué par la flèche AF, tandis que du côté de A', au contraire, l'inclinaison du joint déterminerait le mouvement dans le sens de A'F', et les mêmes causes se reproduisant pour toutes les pierres, il résulterait de l'ensemble de toutes ces forces un couple dont l'effet serait de faire tourner la voûte autour de la verticale du point *a* (*fig.* 13).

Mais les forces provenant de la pesanteur n'ont pu être remplacées (*fig.* 14) par les composantes F et F′ qu'en introduisant deux autres composantes perpendiculaires aux parties A et A′ de la surface normale, et agissant par conséquent de manière à renverser les angles aigus des pieds-droits.

518 On devra donc conclure de ce qui précède que cette partie de la poussée au vide ne peut être détruite qu'en remplaçant par des plans verticaux les surfaces normales qui ont pour directrices les sections parallèles aux têtes.

Il est vrai que ces plans couperont l'intrados de la voûte suivant des angles aigus. Mais c'est là un nouvel exemple de ce que j'ai dit plusieurs fois, que l'on ne peut souvent, en pratique, éviter une difficulté que par une autre, et qu'il faut adopter dans chaque cas la solution qui présente le moins d'inconvénients.

Or, dans la question actuelle, la condition la plus importante est de détruire la poussée au vide et de ramener toutes les pressions dans la direction du chemin, ce qui aura lieu complétement en adoptant :

1° **Pour lignes de joints** *les sections parallèles aux têtes et les courbes qui les rencontrent partout à angles droits;*

2° **Pour surfaces de joints** *les plans verticaux qui contiennent les premières courbes, et les cylindres horizontaux qui projettent les secondes sur un plan parallèle aux têtes.*

V.

519. **Ponceau biais en pierres de taille.** — Les principes précédents ont été appliqués *Pl.* **67** pour la construction d'un ponceau biais en pierre de taille.

On a fait passer les trajectoires par les points qui partagent en parties égales la section *cao*, faite au milieu de la voûte par un plan parallèle aux têtes.

La fig. 22 est le développement de la douelle, et la fig. 23 est celui des joints cylindriques.

Les fig. 17 et 18 représentent les pierres de la clef.

Taille. Supposons que l'on veuille tailler le voussoir A (*fig.* 16). On préparera la pierre sur le panneau de projection vertical *mnuvrs*, et l'on taillera d'abord les deux joints cylindriques *nu*, *vr* (*fig.* 15).

On appliquera ensuite le panneau de tête *mnxzrs* donné par la figure 19, et l'on tracera dans les surfaces de joints les deux courbes *xu*, *zv*, en prenant sur la fig. 20 les ordonnées de ces courbes, ou bien en se servant des panneaux de développement (*fig.* 23).

Enfin, on taillera la surface cylindrique de la douelle (*fig.* 16), en faisant glisser une règle sur les quatre courbes *xu*, *xz*, *uv*, *zv*, après avoir marqué sur ces courbes les points de repère donnés par les projections 19 et 20.

Les lignes tracées en points sur la projection horizontale de la pierre A (*fig.* 20) sont les génératrices des surfaces cylindriques de douelle et de joints.

Les parallèles au berceau sont les génératrices de la douelle, et les perpendiculaires aux plans de tête sont les génératrices des surfaces de joints.

Pose. Les joints de la clef et des pierres adjacentes sont formés de deux surfaces cylindriques, courbées en sens contraires et qui se touchent suivant l'horizontale projetante qui contient le point le plus élevé de la trajectoire. C'est ce qui

produit le point de rebroussement *a* sur la projection verticale de cette courbe (*fig.* 5, *Pl.* 66).

Cette différence de courbure dans les joints s'opposerait à la pose des voussoirs, si l'on ne prenait pas les précautions que nous allons indiquer :

1° On disposera l'appareil de manière à faire passer un joint transversal par chacun des points a', a' qui correspondent au changement de courbure des joints continus.

2° On posera les pierres dans l'ordre indiqué par des chiffres sur la projection horizontale (*fig.* 20).

C'est-à-dire, qu'après avoir posé toutes les pierres qui ne sont pas numérotées, on posera successivement deux par deux les pierres désignées par les chiffres 1, 2, 3, 4 et 5, en terminant par ces dernières.

Il résulte de ce que nous venons de dire que les pierres 5 devraient être coupées aux points a'' par des joints transversaux; mais comme ces coupes seraient trop près des plans de têtes, on pourra les supprimer, et dans ce cas, on fera la petite portion de joint $a''w$ verticale, ou bien on prolongera jusqu'aux plans des têtes les joints cylindriques qui ont pour directrices les courbes $a''w'$.

En taillant un modèle de l'exemple qui est projeté sur les fig. 19 et 20, on pourra se convaincre que la poussée au vide est *complètement détruite;* et que toutes les pressions sont ramenées dans des plans parallèles aux têtes, ce qui au surplus doit être évident pour toute personne qui connaît les éléments les plus simples de la statique.

520. Lorsque le berceau aura beaucoup de biais, les plans de joint parallèles aux têtes rencontreront la douelle suivant des angles qui seront très-aigus vers les naissances.

J'ai conservé cette disposition dans l'exemple qui est donné ici, comme étude de coupe de pierres, et dans lequel toutes les irrégularitées sont exagérées avec intention, par le peu d'étendue de la voûte, et par le petit nombre de voussoirs qui la composent; mais dans la pratique, les angles aigus qui ont lieu vers les naissances, pourront toujours être ramenés dans des limites convenables, en remplaçant le cintre demi-circulaire de l'exemple actuel, par un arc de cercle ou d'ellipse dont les extrémités s'appuieraient sur des pieds-droits verticaux, comme on peut le voir sur la planche 70.

521. Quant à la courbure des lignes de joint sur les têtes, il est encore évident (*Pl.* 68) que dans un grand berceau, elle devient insensible; et d'ailleurs, elle ne paraît étrange que par défaut d'habitude; car si le berceau de la planche 67 est vu de face et à quelqne distance, la symétrie qui existe entre les joints de tête de gauche, et les projections des trajectoires de droite, ne produit pas un effet plus désagréable à l'œil que beaucoup d'autres dispositions d'appareils que l'on rencontre à chaque pas dans un grand nombre de voûtes et de voussures des anciens monuments.

Enfin dans une construction de ce genre les conditions de solidité doivent dominer toute autre considération, et si l'on ne pouvait pas éviter la courbure des lignes de joint sur les têtes, il ne faudrait certainement pas hésiter à sacrifier l'élégance de l'appareil à la sécurité des voyageurs.

VI.

522. **Séparation de la voûte en zones indépendantes.** — Dans les articles précédents, nous sommes parvenus à ramener dans un plan parallèle aux têtes du berceau toutes

les forces qui tendent à faire glisser les pierres sur leurs joints. En donnant aux pieds-droits une résistance suffisante, et supposant une exactitude de taille à laquelle il est impossible d'arriver dans les applications, une voûte pourrait, à la rigueur, être étudiée théoriquement de manière à résister aux forces constantes qui doivent agir sur elle. Mais l'équilibre que l'on serait parvenu à établir dans cette hypothèse, serait immédiatement détruit par la force nouvelle, résultant du passage d'une voiture ou d'un train au-dessus de la voûte.

Il faut donc tâcher de combattre toutes les causes de rupture ou de déformation qui pourraient provenir, non-seulement du poids des matériaux qui composent la voûte, mais encore des fardeaux ou des chocs qu'elle est destinée à supporter.

Il faut encore ajouter le poids, quelquefois considérable, des terres dont la voûte est chargée. En effet, on doit distinguer le cas où un tunnel est percé dans un terrain dur et solide, de celui où la voûte est couverte par un remblai très-élevé. Il est certain que, dans ce cas, la pression produite par le tassement des terres fraîchement remuées doit s'ajouter au poids des matériaux qui composent la voûte.

On doit encore prévoir les effets en sens contraire produits par le passage des trains, s'il s'agit d'un chemin de fer, ou par celui des voitures si la voûte est construite au-dessous d'une route ordinaire.

Ainsi le tassement des terres, le passage des voitures, ou la présence des fardeaux qui pourraient momentanément stationner au-dessus d'une voûte, changeront à chaque instant les directions des forces qui agissent sur les diverses parties qui la composent, et tandis que quelques-unes de ces parties, pressées dans un sens, tendent à descendre, d'autres parties,

repoussées en sens contraire, pourront remonter sur leurs joints.

Il est donc indispensable, lorsqu'une voûte est exposée à des pressions ou à des chocs dont la direction et l'intensité sont très-variables, que toutes ses parties soient liées entre elles assez solidement pour que le changement de direction dans les forces qui agissent sur elle ne puisse jamais faire glisser les pierres sur leurs joints, ni les faire tourner autour des arêtes. Il faut enfin que l'on soit en droit de considérer la voûte comme ne formant qu'une seule pièce. Or, ce résultat ne peut être obtenu que par des mortiers ou armatures destinés à lier entre elles toutes les parties, ce qui nous conduit à étudier la question d'équilibre sous un autre point de vue.

523. Si le mortier pouvait acquérir de suite une consistance égale à celle des pierres, le choix de l'appareil deviendrait indifférent, et considérant la voûte comme formée d'un seul morceau, il suffirait de lui donner l'épaisseur convenable pour qu'elle puisse, sans se rompre, résister au maximum des pressions qui doivent agir sur elle.

Mais il n'en est pas ainsi; au moment du décintrement, quelques joints se resserrent par en bas, tandis que d'autres au contraire se resserrent par en haut, et la voûte prend une forme un peu différente de celle qui lui était destinée par le tracé de l'épure.

Or, tant que la résultante qui exprime la pression de chaque pierre sur son joint de pose ne sortira pas des limites de ce joint, la pierre ne pourra pas tourner autour de ses arêtes, et la résistance du mortier suffisant pour s'opposer au glissement, il n'y aura pas rupture, mais seulement une déformation du cintre primitif.

Cette compression des mortiers formant en quelque sorte une infinité de petits ressorts, il en résulte une espèce d'élasticité par suite de laquelle on peut comparer la voûte à une lame plus ou moins épaisse de matière flexible à laquelle on aurait donné la forme d'un berceau.

524. Pour reconnaître les effets produits par la compression des mortiers au moment du décintrement, on trace sur les têtes une droite ou une courbe qui se déforme lorsque la voûte est abandonnée à son propre poids, de sorte qu'en comparant les ordonnées de la courbe qui résulte du décintrement avec celles de la droite ou de la courbe qui avait été tracée sur les têtes, on reconnaît de combien chaque point s'est écarté de sa position primitive.

525. Toutes les expériences ont conduit à des résultats ayant plus ou moins d'analogie avec la courbe *cao* (*fig.* 27).

On reconnaît par cette figure, dans laquelle nous avions supposé que le cintre primitif était un demi-cercle, que les joints du milieu se sont ouverts par en bas, tandis qu'au contraire ceux qui sont plus près des naissances se sont ouverts par en haut, de sorte que la clef et les voussoirs adjacents tendent à descendre en repoussant au contraire par en haut les points *m*,*m* que l'on nomme joints de rupture, parce que c'est à la hauteur de ces points que la voûte se briserait si la pression était assez grande.

526. Dans une voûte en plein cintre, les joints de rupture sont à peu près à 30 degrés de hauteur.

527. Supposons actuellement (*fig.* 24) une voûte en moellons ou petits matériaux assez bien liés pour que l'on puisse faire abstraction de la forme de l'appareil ou de la direction

des joints. Supposons que par le point *a* placé au centre de la voûte on fasse passer un certain nombre de plans verticaux. On obtiendra une suite de sections elliptiques, ayant toutes même hauteur et ne différant que par leur axe horizontal. Or, après le décintrement; la plus grande déformation aura lieu dans le plan vertical *pq*, qui joint les deux angles aigus du quadrilatère *mnvu*. C'est à ce résultat que M. Lefort a été conduit par l'analyse algébrique dans le mémoire que j'ai cité plus haut.

528. Il faut ajouter que si le berceau était assez long pour que l'on pût y tracer la section droite, le maximum de contraction aurait lieu suivant cette courbe.

529. Or dès qu'il fut reconnu que c'est dans le plan *pq* que se produit le maximum d'effet, on fut naturellement conduit à chercher les moyens de ramener ce plan dans une position parallèle aux têtes.

M. Clapeyron a pensé qu'il satisferait à cette condition, en remplaçant (*fig.* 25) la partie du berceau qui est au-dessus des joints de rupture par une suite de zones, parallèles aux têtes, et indépendantes les unes des autres, de sorte que dans chaque zone le maximum d'effet aura lieu dans le plan diagonal *co*, et par conséquent dans un plan qui se rapprocherait de la direction du chemin et qui se confondrait entièrement avec cette direction, si on pouvait partager la voûte en zones infiniment étroites.

C'est d'après ce principe qu'ont été exécutées plusieurs voûtes du chemin de fer de Versailles rive droite.

530. Si l'on voulait adopter cette combinaison dans un berceau en pierres de taille, on pourrait opérer comme on le voit par la figure 28, c'est-à-dire que jusqu'à la hauteur des joints de rupture, les arêtes d'intrados longitudinales seront conti-

nues, et les joints montants disposés en liaison, tandis qu'au-dessus des joints de rupture les joints montants seront continus, et les arêtes longitudinales en liaison. Enfin, on pourrait au-dessus des joints de rupture composer la partie supérieure de la voûte avec des arcs parallèles en retraite (*fig.* 26).

531. J'ai dû exposer un principe dont l'application a été faite avec succès par les habiles ingénieurs que j'ai cités plus haut. Cependant je ne suis pas entièrement convaincu de l'avantage résultant de la séparation de la voûte en zones indépendantes.

Il me semble, en effet, que dans la recherche précédente, il aurait fallu distinguer le plan dans lequel se produit le maximum d'effet provenant de la compression des mortiers de celui qui contient le maximum des pressions des pierres sur leurs lits; d'ailleurs, au maximum d'effet qui agit réellement sur la voûte, il faut ajouter celui qui agit sur le vide.

Ce dernier coïncidant toujours avec la section droite, quelle que soit la largeur des zones, la diminution de cette largeur ne changera rien à la direction du plus grand effort qui tend à renverser les pieds-droits; et cette direction $p'q'$ ne passant pas par les points d'appui, il doit en résulter pour chaque zone un effet de torsion analogue à celui dont nous avons parlé au n° 517.

D'ailleurs, en isolant les zones, on les affaiblit, et l'on augmente par conséquent l'intensité de la contraction; surtout pour les zones qui sont au-dessous du passage des voitures. Il serait alors nécessaire de les fortifier par des arcs doubleaux, ou par des chaînes en pierre de taille.

Enfin, lorsque la voûte sera chargée par un remblai très-élevé, la poussée provenant du tassement des terres, tendra

nécessairement à écarter les têtes et à faire fendre la voûte suivant le joint qui sépare deux zones adjacentes.

Il est vrai qu'après le décintrement, on a rattaché les zones entre elles, en remplissant les vides momentanément laissés pendant la construction; mais alors l'isolement des zones n'aura eu d'autre résultat que de les affaiblir, et par conséquent d'augmenter la contraction pour chacune d'elles. D'ailleurs, si pendant le tassement produit par la compression des mortiers la contraction n'est pas identiquement la même pour toutes les zones, il en résultera, dans la surface de la douelle, une solution de continuité qui produira l'effet le plus désagréable : et si, au contraire, comme cela paraît avoir eu lieu, la contraction se fait également, il devient inutile de séparer les zones, et de perdre, par leur isolement, la résistance que chacune d'elles oppose à la contraction de celle qui lui est adjacente.

Cette opinion, que j'avais énoncée dans la troisième édition de l'ouvrage actuel, paraît avoir été justifiée par l'expérience. M. l'ingénieur Graeff a remarqué que, dans plusieurs ponts, la division de la voûte en zones indépendantes offrait l'inconvénient de faire éclater les voussoirs sur les lignes séparatives de ces zones, et de produire, par l'inégalité du tassement d'une zone à l'autre, des ressauts et jarrets dans les lignes d'assises.

532. Cette méthode de séparation d'une voûte en zones provient d'une erreur émise par M. Lefort et répétée depuis par M. Graeff, à la page 4 des *Annales des ponts* (juillet et août 1852). C'est qu'en partageant une voûte oblique en une suite de zones indépendantes, on ramènera les conditions de stabilité à celles d'une voûte droite qui aurait pour base la courbe de tête.

Dans le mémoire déjà cité, M. Lefort dit, p. 292 : « Cette » proposition serait absolument vraie si l'épaisseur des zones

» était infiniment petite, et alors, en appliquant les principes » établis, on devrait avoir pour lignes de joints, d'une part, » des courbes parallèles aux têtes, d'autre part, des courbes » qui couperaient celles-ci à angles droits.

» *Les surfaces de joints formées par les normales à la voûte* » *seraient planes pour l'une des séries*, et de la nature de » celles dites surfaces gauches. Pour l'autre, ces dernières se- » raient encore des surfaces réglées, mais non plus des surfaces » développables. »

Il y a évidemment une erreur dans la proposition précédente. En effet, les surfaces normales qui ont pour directrices les sections d'un berceau oblique par des plans parallèles aux têtes, sont toutes égales entre elles, *quelle que soit la position de la section directrice*, et ces surfaces ne changeront pas de nature lorsque cette directrice sera l'arête d'une zone *infiniment mince*.

D'ailleurs, cette zone infiniment mince ne peut jamais être assimilée à une voûte droite, puisqne la génératrice, quoique *infiniment* courte, n'en fait pas moins *un angle oblique* avec le plan de tête, cet angle étant une quantité *constante* et INDÉPENDANTE de la longueur du berceau.

533. De ce que le maximum d'effet aura lieu dans le plan vertical qui contient la diagonale *vn* (*fig.* 24), on ne doit pas en conclure que c'est dans ce plan que doit avoir lieu le maximum des pressions.

Il est bien certain que, dans un berceau ordinaire, la pression résultante a lieu dans le plan de la section droite. Or il en sera de même toutes les fois que l'on emploiera des surfaces normales, continues comme celles qui seraient formées par des assises en pierres de taille, ou discontinues comme

les nombreuses facettes des briques ou des moellons d'appareil que l'on emploie ordinairement dans la construction des ponts biais. Par conséquent, si la séparation d'une voûte en zones indépendantes et parallèles aux têtes pouvait diminuer la poussée au vide, ce ne serait pas en changeant la direction du plan suivant lequel agit cette poussée, mais en diminuant son intensité, par la substitution des plans verticaux qui séparent les zones, aux nombreuses petites faces normales qui existeraient sur les faces des voussoirs ou des briques qui aboutissent aux plans de séparation; mais alors il faudrait que les têtes de ces voussoirs fussent taillées suivant des plans verticaux, ce qui augmenterait l'indépendance des zones et priverait, comme nous l'avons déjà dit, chacune d'elles du secours qu'elle emprunte aux zones adjacentes.

VII.

534. **Pont biais en maçonnerie.** — La planche 68 contient les projections d'un pont en maçonnerie construit au-dessus d'un chemin de fer, pour le passage d'une route ordinaire.

535. Si l'on se rappelle ce que nous avons dit aux numéros 379 et 446, on en conclura de suite qu'il est inutile d'employer des surfaces réglées ou cylindriques pour les joints des voussoirs de têtes, et que le peu d'étendue de ces surfaces permettra de les remplacer par des plans perpendiculaires au plan vertical de projection, en ajoutant cette condition, que les plans de joints de la tête A (*fig.* 30) contiendront le centre du cercle *co*, et seront par conséquent perpendiculaires à cette arête, tandis que les joints de la tête A′ devront contenir le centre du cercle *c′o′*.

Il est évident que cela revient à considérer les deux têtes comme deux petits berceaux indépendants l'un de l'autre et appareillés suivant le principe du numéro 365.

536. Pour construire la partie du berceau qui est en maçonnerie, on couvrira les couchis du cintre (*fig.* 33) par une aire cylindrique en plâtre sur laquelle on tracera toutes les trajectoires.

Ces courbes serviront à régler la pose des moellons dont il faudra faire varier l'épaisseur proportionnellement à l'écartement des lignes de joints. Tous ces moellons taillés d'avance, porteront une lettre indiquant l'assise et un numéro désignant la place de chacune suivant son rang.

537. La différence d'épaisseur entre les deux têtes de chaque moellon étant peu sensible, on pourra leur conserver la forme du parallélipipède rectangle, de sorte que tous les joints seront naturellement perpendiculaires à la douelle.

538. Il résulte de là, que les surfaces de joints seront partout normales à la voûte, d'où proviennent évidemment, selon moi, tous les effets de torsion et de poussée au vide qui ont lieu lors du décintrement des ponts biais, et qui ne peuvent être évités qu'en employant, comme nous l'avons dit au numéro 518, des joints verticaux parallèles aux têtes et les cylindres projetants des trajectoires orthogonales. Mais on conçoit que ces moyens ne peuvent être appliqués que dans une voûte qui serait entièrement construite en pierres de taille; car lorsqu'il s'agit d'une grande voûte, formée avec des moellons, la taille des surfaces cylindriques et des têtes verticales de chaque voussoir coûterait beaucoup trop cher.

C'est pourquoi, dans la construction de ces sortes de voûtes,

il faut s'attacher surtout à la bonne qualité des pierres, des briques et des mortiers, ainsi qu'à l'exécution parfaite de tout le travail de maçonnerie, afin que l'enchevêtrement et la liaison des pierres s'opposent à tout glissement sur les surfaces de joint et permettent autant que possible de considérer la voûte entière comme si elle était d'une seule pièce.

539. Pour tracer les trajectoires sur le cintre, on emploiera les panneaux de développement de la fig. 32.

On n'a pas développé toutes les trajectoires, parce que ces courbes étant identiques, il suffit d'en avoir une seule.

Pour obtenir toutes les parties nécessaires au tracé de la voûte, il a fallu développer une trajectoire depuis le point où elle coupe la génératrice la plus élevée du berceau jusqu'à l'extrémité de la ligne de joint, qui approche le plus du plan de naissance.

Ce développement se compose de quatre parties *ab*, *b'c*, *c'd*, *d'e*, qui, placées à la suite les unes des autres, formeraient la courbe cherchée.

Pour construire toutes ces parties de la trajectoire, il a suffi, dans l'exemple qui nous occupe, de développer, en partant des naissances, les première, deuxième, cinquième et douzième lignes de joints.

En général, dans la construction de ces développements, il faudra que le point le plus bas de chaque partie de courbe soit à la même hauteur que le point le plus élevé de la courbe précédente; ainsi, par exemple, les points *b* et *b'* (*fig.* 32) doivent être situés sur la même génératrice du berceau. Il en est de même des points *c* et *c'*, *d* et *d'*.

Il est inutile d'ajouter que ces développements serviront pour les deux côtés de la voûte, et qu'il suffira de les retourner.

Pour tracer ces courbes sur le cintre, il sera nécessaire d'y établir d'abord les génératrices du cylindre et de numéroter les points de repère sur ces lignes et sur les panneaux de la fig. 32; au moyen de cette précaution, la courbe *ab* pourra servir à tracer toutes les portions de trajectoires comprises entre les génératrices *aa'* et *bb'*.

Il suffira, pour passer d'une trajectoire à l'autre, de faire glisser le patron horizontalement d'une quantité égale à la distance 1—1, qui représente la portion de génératrice comprise entre deux trajectoires consécutives.

Ainsi, par exemple (*fig.* 32), le même arc 2—3 servira pour tracer tous les arcs 2'—3', 2''—3'', etc., compris entre les mêmes génératrices 2—2, 3—3.

La courbe *b'—c* servira pour tracer toutes les parties de trajectoires comprises entre les génératrices *b—b'*, *c—c'*, et ainsi de suite jusqu'aux naissances.

VIII.

540. **Berceau circulaire.** Dans les exemples qui précèdent les sections de la voûte par des plans parallèles aux têtes, étaient des cercles. Mais dans le cas d'un berceau circulaire, ces courbes seront des ellipses et la seule différence qui en résultera, c'est que la normale *mn* (*fig.* 49, *Pl.* 69), au lieu d'être dirigée vers le centre de chaque section, devra partager en deux parties égales l'angle F*a*F' formé par les rayons vecteurs (91).

541. Si le premier système de lignes de joints se composait de courbes non définies, mais cependant parallèles à un même plan, on pourrait obtenir la trajectoire en opérant de la manière suivante.

542. On admettrait d'abord que si les points *c*,*o* (*fig.* 37) sont situés à égale distance du point *a*, la droite *mn*, menée par ce dernier point perpendiculairement à la corde *co*, pourra sans inconvénient être considérée comme une normale à la courbe *cao*.

543. D'après cela, étant données (*fig.* 36) les courbes 1,2,3,4, que nous supposons toutes parallèles au plan vertical de projection.

On tracera successivement les droites *a*—*c* perpendiculaires sur la corde *mn* et par conséquent sur la première courbe ; *c*—*e* perpendiculaire sur la deuxième courbe ; *e*—*u* perpendiculaire sur la troisième et ainsi de suite, ce qui donnera le polygone *aceu* pour la projection verticale de la courbe cherchée.

En effet les droites *ae*,*ce*,*eu*, peuvent être considérées comme les traces verticales d'un plan mobile qui serait successivement perpendiculaire aux courbes 1,2,3,4, sans cesser d'être perpendiculaire au plan vertical de projection ; de sorte que chacune des droites *ac*, *ce*, *eu*, sera la projection d'une petite partie de la trajectoire.

Il résulte évidemment de la construction précédente, que les points *c*,*e*,*u*, sont tous un peu trop bas (499) ; et si l'on veut obtenir plus d'exactitude, on n'admettra la courbe *aeu* que comme une première approximation, et l'on tracera successivement la droite *a*—*e'* perpendiculaire sur la corde *m'n'* et par

conséquent sur la deuxième courbe ; c'—e' perpendiculaire sur la troisième courbe ; e'—u' sur la quatrième, ce qui donnera une seconde courbe d'approximation $ac'e'u'$, dans laquelle les points c', e', u' seront un peu trop élevés.

Or, les deux polygones *aceu*, $ac'e'u'$, pouvant être considérés comme des limites entre lesquelles la courbe cherchée doit être nécessairement comprise ; il est évident que l'on pourra s'approcher de cette ligne autant que l'on voudra ;

1° En augmentant le nombre des courbes qui doivent être traversées à angle droit par la trajectoire ;

2° En prenant pour résultat la courbe qui passerait par les milieux des arcs cc', ee', uu'.

IX.

544. **Appareil orthogonal convergent.** — Nous avons supposé jusqu'ici que toutes les lignes de joint du premier système étaient parallèles au plan vertical de projection. Mais la nature de la question proposée peut engager à introduire des dispositions différentes. Supposons en effet que l'on ait un berceau d'une grande longueur terminé par des têtes biaises. Si on adoptait pour toute la longueur du berceau des joints parallèles aux têtes, et si on faisait, comme dans l'exemple précédent, passer les trajectoires par les points qui diviseraient en parties égales la section faite à égale distance des deux extrémités du berceau, il y aurait trop d'inégalité entre les hauteurs des assises, qui seraient voisines des plans de tête.

545. On évitera cet inconvénient en partageant la voûte en

trois parties par les deux plans verticaux *voc*, *v'c'o'* (*fig.* 41, 42, 45, 46).

La partie du milieu serait appareillée comme un berceau ordinaire, et dans les autres parties on prendrait pour lignes des joints discontinus les sections de la voûte par les plans qui contiennent les deux verticales projetées en *c* et *c'*, et qui résultent de l'intersection des plans des têtes par les deux plans verticaux *co*, *c'o'*.

Les trajectoires dans ce cas seront un peu plus difficiles à obtenir, et le travail sera augmenté, surtout par cette circonstance que ces courbes ne sont pas identiques comme celles du n° 498, de sorte que les opérations qui auront été faites pour déterminer l'une d'elles devront être recommencées pour chacune des autres.

546. **Construction des trajectoires.** — Je rappellerai d'abord que si une ellipse *o'a'c'* (*fig.* 39) est inclinée par rapport au plan vertical de manière que sa projection sur ce plan soit un cercle *cao*, la tangente à l'ellipse se projettera par une tangente au cercle, de sorte que si par le point *a* on construit un plan perpendiculaire à la courbe, la trace horizontale *pq* sera perpendiculaire sur la projection *c'o'* de l'ellipse, tandis que la trace verticale *qv* sera parallèle au rayon *an*.

547. Il est essentiel de remarquer que le point *n'* de la trace horizontale du plan *pqv* doit toujours se trouver sur la droite *nn'*, quelles que soient l'inclinaison de l'ellipse *c'o'* et la position du point *aa'* sur cette ellipse.

548. Supposons actuellement (*fig.* 51) que les droites *c'*—1, *c''*—2, *c'''*—3, soient les projections horizontales de plusieurs ellipses situées sur la surface d'un cylindre perpen-

diculaire au plan vertical de projection, et qui aurait pour section droite la demi-circonférence $ca^{\text{IV}}o$.

549. La construction d'une trajectoire revient à faire mouvoir un plan de manière qu'il coupe successivement à angles droits toutes les ellipses dont nous venons de parler; or le plan qui passera par le point a et qui sera perpendiculaire au cercle c—o, aura pour trace les deux droites an, nn, et coupera l'ellipse c'—1 en un point dont les projections seront a', a'.

Si nous concevons par ce point un plan perpendiculaire à la tangente $a't'$, et par conséquent à l'ellipse c'—1, il aura pour trace horizontale la droite $p'q'$ (547), et sa trace verticale sera parallèle au rayon an. Cette trace n'a pas été conservée parce qu'elle n'est pas nécessaire aux opérations suivantes.

L'horizontale menée par le point a' dans le plan $p'q'$ perce le plan vertical c''—2 en un point u'.

De plus le point s', intersection des traces horizontales $p'q'$, c''—2, étant projeté sur la droite co, on tracera $u's'$, qui est l'intersection des deux plans $p'q'$, c''—2; cette opération déterminera le point a'' suivant lequel l'ellipse c''—2 est coupée par le plan $p'q'$ mené par le point a' perpendiculairement à l'ellipse c'—1.

Le plan $p''q''$ mené par a'' perpendiculairement à l'ellipse c''—2 coupera l'ellipse c'''—3 en un point a'''; le plan $p'''q'''$ mené par a''' perpendiculairement à l'ellipse c'''—3 coupera l'ellipse c^{IV}—4 en un point a^{IV}; ainsi on tracera :

1° La droite $a''n''$ parallèle au plan vertical de projection, ce qui donnera n'' (547);

2° $p''q''$ trace horizontale du plan passant par le point a'' et perpendiculaire à l'ellipse c''—2;

3° L'horizontale $a''u''$ passant par le point a'' et située dans le plan $p''q''$;

4° Les deux verticales $u''u''$, $s''s''$.

Enfin la droite $s''u''$ sera l'intersection des plans c'''—3, $p''q''$. Cette dernière opération déterminera le point a''' suivant lequel l'ellipse c'''—3 est coupée par le plan $p''q''$ perpendiculaire à l'ellipse c''—2.

Et ainsi de suite pour obtenir les points a^{iv}, a^{v}, etc.

550. Au lieu de chercher les deux projections de la trajectoire, il sera plus simple de commencer par construire cette courbe dans le développement du cylindre.

Il suffit d'admettre comme évident que toutes les lignes qui se coupent à angle droit sur la surface du cylindre doivent aussi se couper à angle droit dans le développement.

Ainsi on construira (*fig.* 40) le développement de la partie biaise du berceau, et l'on tracera en même temps avec beaucoup de soin le développement des ellipses c'—1, c''—2, c'''—3.

Cela étant fait, si on veut obtenir dans le développement la trajectoire qui contient le point a, on pourra opérer comme nous allons le dire.

La droite aa', perpendiculaire sur co, sera prise pour une première partie de la trajectoire et déterminera le point a' que l'on projettera sur les deux figures 51 et 52.

On tracera ensuite sur la figure 51 la projection verticale de la tangente $a't'$, et l'on construira cette tangente dans le développement (*fig.* 40), en observant qu'elle doit être l'hypoténuse d'un triangle rectangle $a't'm'$, dans lequel un des côtés $a'm'$ serait égal à la projection verticale de la tangente (*fig.*

51), tandis que $t'm'$, le second côté de l'angle droit, est égal à $t'm'$ différence des distances des points t', m' au plan de la section droite co (*fig.* 52).

La tangente $t'a'$ étant construite sur la figure 40, la droite $a'a''$, perpendiculaire à cette tangente, sera la deuxième partie de la trajectoire, ce qui déterminera le point a'' que l'on projettera sur les figures 51 et 52.

Ensuite on tracera :

1° La projection verticale de la tangente $a''t''$ (*fig.* 51) ;

2° Cette même tangente, dans le développement (*fig.* 40), en faisant

$$a''m'' \text{ (fig. 40)} = a''t'' \text{(fig. 51)},$$

et

$$t''m'' \text{ (fig. 40)} = t''m'' \text{ (fig. 52)} ;$$

3° La droite $a''a'''$ déterminera a''', que l'on reportera sur les figures 51 et 52 ; ainsi de suite pour tous les autres points.

Je n'ai pas besoin de rappeler qu'on obtiendra plus d'exactitude en augmentant le nombre des courbes qui doivent être traversées à angle droit par la trajectoire ; et si, dans les figures 52 et 40, on a laissé beaucoup d'espace entre ces lignes, c'était uniquement pour éviter la confusion et rendr plus claire la démonstration du principe.

La position des points t', t'', t''' (*fig.* 51) étant arbitraire, si on les prend de préférence sur la développante du cercle $ca^{IV}o$, il en résultera que dans le développement (*fig.* 40), ces mêmes points seront sur une droite tt''' perpendiculaire à co.

On remarquera encore que les arcs aa'', aa''', aa^{IV} (*fig.* 51)

doivent être égaux, dans le développement, aux droites aa'', aa''', aa^{IV} (*fig.* 40).

551. Enfin on pourrait encore tracer très-promptement les trajectoires sur le développement du cylindre, en opérant comme nous l'avons dit au numéro 543, ce qui donnera en pratique une exactitude suffisante.

552. On a vu (536) que pour construire un berceau en moellon, il n'est pas nécessaire d'avoir la projection de la trajectoire sur le plan des têtes, et qu'il suffit de construire (*fig.* 44 et 48) le développement de ces courbes.

Quant aux têtes du berceau, on les rabattra comme nous l'avons fait figures 43 et 47.

On pourra aussi les appareiller comme nous l'avons dit au numéro 535, et sans avoir égard à la longueur de la voûte.

553. La figure 50 indique le raccordement d'un berceau annulaire terminé par deux parties de berceau à tête biaise.

X.

554. **Appareil hélicoïdal.** — La figure 38 représente l'appareil adopté dans la construction des chemins de fer anglais.

Ce genre d'appareil est surtout avantageux lorsqu'on veut employer des briques ou des moellons dont l'épaisseur uniforme ne pourrait pas se prêter à l'inégalité d'écartement des trajectoires orthogonales.

555. La planche **70** contient les détails relatifs à la construction d'un pont biais appareillé par assises hélicoïdales, ainsi nommées parce que les arêtes d'intrados sont des hélices (149).

Les figures 3 et 6 sont les projections verticales et horizontales de la voûte à construire; l'arc de tête appartient à une circonférence de cercle dont le centre serait situé en O.

La section droite du cylindre d'intrados est par conséquent une ellipse *nvu* rabattue sur le plan horizontal (*fig.* 6), en tournant autour de la corde *nu* située à la hauteur des naissances de la voûte.

Épure. — On partagera l'arc de section droite en parties égales, et par chaque point de division on tracera une génératrice du cylindre. Ces génératrices, qui n'ont pas été conservées sur l'épure, étant reportées figure 7, on construira le développement du cylindre, et l'on divisera les deux cordes parallèles $m'n'$ et $c'a'$ en autant de parties égales que l'on voudra obtenir de voussoirs sur les têtes représentées dans le développement par les deux courbes $m'b'n'$ et $c'q'a'$.

Par le pont c' ou par tout autre point de la corde $c'a'$, on tracera une perpendiculaire à cette ligne, et si cette perpendiculaire ne contient pas un des points de division de la corde $m'n'$, on l'inclinera un peu de manière à le faire passer par celui de ces points dont elle se rapprochera le plus.

Par chacun des autres points de la corde $c'a'$, on tracera une droite parallèle à la première, et ces droites, qui ne sont autre chose que les développements des hélices formant les arêtes d'intrados de la voûte, passeront alors par les points de division de la corde $m'n'$, et détermineront les largeurs des voussoirs sur les arcs des têtes.

556. Ces largeurs ne seront pas tout à fait égales entre elles; car il est évident, par exemple, que l'arc 1—2 (*fig.* 7 et 8) ne peut pas être égal à l'arc 3—4, puisque les cordes de ces deux arcs ne sont pas également inclinées par rapport aux deux droites parallèles entre lesquelles elles sont comprises.

557. Si l'on veut avoir des voussoirs égaux sur les têtes, il faudra partager les deux courbes $m'b'n'$, $c'q'a'$ en un même nombre de parties égales; mais alors les hélices comprises entre celles qui aboutissent aux points n' et c' ne seront pas parallèles, et l'on ne pourra plus, pour cette partie de la voûte, employer des briques ou des moellons dont l'épaisseur serait la même dans toute l'étendue d'une assise.

Ces irrégularités sont rendues plus sensibles sur les figures 8 et 9.

Sur la figure 8, les cordes sont partagées en parties égales, et les hélices sont figurées dans le développement par des droites parallèles, mais les voussoirs sont inégaux sur les arcs de tête; tandis que sur la figure 9, on à voulu obtenir des voussoirs égaux sur les têtes, et dans ce cas, les hélices d'intrados ne sont plus parallèles.

Au surplus, quel que soit le parti que l'on prendra, cette irrégularité devient insensible lorsqu'il s'agit d'une grande voûte.

558. Les droites qui, sur la figure 7, représentent les hélices développées, coupent les génératrices du cylindre suivant des points qui n'ont pas été conservés sur l'épure.

Ces points ramenés (*fig.* 4) sur les projections horizontales des génératrices du cylindre, ont déterminé les projections horizontales des hélices.

Enfin, les mêmes points projetés (*fig.* 3) ont déterminé les

projections verticales des arêtes d'intrados des joints continus.

On n'a pas tracé sur cette projection les joints discontinus parallèles aux têtes du berceau ; la place de ces joints dépend des dimensions des matériaux que l'on peut employer.

559. Il n'est pas nécessaire, pour construire un pont biais, de déterminer sur l'épure les projections des surfaces normales qui seront naturellement formées par les faces de têtes et de joints des briques ou moellons rectangulaires qui seront employés dans la construction de la voûte.

Il suffira, comme on le voit sur la figure 33 de la planche 68, de tracer sur le cintre les hélices destinées à régler la direction des lits, puis de gauchir un peu, pour chaque moellon, la face qui doit coïncider avec l'intrados de la voûte. Cette opération n'exige pas d'épure et se fait sur place en posant d'abord la pierre, afin de voir ce qu'on doit lui enlever pour que les quatre angles du voussoir coïncident avec la douelle, et dans les grands berceaux, lorsque les pierres ne sont pas très-grandes, on peut négliger entièrement cette opération.

560. C'est donc uniquement pour étudier les surfaces normales et pour mieux faire comprendre les effets qui peuvent résulter de leur inclinaison que j'ai construit les figures 2, 5, 10 et 11.

561. **Arêtes d'intrados.** — Le cylindre d'intrados de l'une des deux voûtes projetées sur les figures 3 et 6 ayant été transporté figures 2 et 5, on a construit la section droite (*fig.* 10), et la figure 11 qui représente une partie du developpement de la douelle.

La droite 3—7 perpendiculaire sur la corde $a''c''$ est la transformée de l'hélice qui contient le point 3 de l'arc de tête.

Les points suivant lesquels cette hélice (*fig.* 11) coupe les génératrices du cylindre développé étant ramenés successivement (*fig.* 5 et 2) sur les projections des mêmes génératrices, on obtiendra les projections horizontale et verticale de l'hélice demandée.

562. Toutes les hélices étant identiques, les courbes obtenues pour les projections de l'une d'elles pourront servir à tracer toutes les autres.

Il suffira de faire mouvoir toutes ces courbes parallèlement à elles-mêmes et suivant la direction du cylindre.

563. Surfaces normales. — En opérant comme nous l'avons dit au n° 506, on construira une normale à la voûte par chacun des points de l'hélice obtenue.

Ainsi, par exemple, l'arc de cercle *mv*, *m'v'*, provenant de la section du berceau par le plan P qui est parallèle aux têtes, la tangente *tx* sera parallèle au plan vertical de projection, et par conséquent, à la trace verticale du plan tangent au point 5; d'où il résulte que le rayon *u'*—5 du cercle *m'v'* se confondra avec la projection verticale *u'n'* de la normale du point 5.

La projection horizontale *un* de cette même normale sera perpendiculaire à la trace horizontale du plan tangent, et par conséquent à la direction du cylindre.

Enfin, le point *uu'* étant projeté en *u''* sur la figure 10, la droite *u''n''* sera la projection de la normale sur le plan de la section droite du cylindre. En recommençant, on déterminera toutes les normales.

La projection de chacune de ces lignes sur la figure 2 doit passer par le centre de la section circulaire qui contient le

point correspondant de l'hélice, et les projections de toutes les normales sur la figure 10 doivent être tangentes à la courbe *zr* qui est la développée de l'ellipse de section droite rabattue figure 10.

La construction de cette courbe facilite la vérification des normales.

Pour que l'on puisse mieux comprendre la forme de la surface normale, elle a éte prolongée (*fig.* 1 et 5) au delà de la partie du cylindre qui est projetée (*fig.* 2), et dont le développement est indiqué par une teinte sur la figure 11.

564. **Arêtes d'extrados.** — Les normales étant projetées sur le plan de la figure 10, il sera facile de déterminer le point suivant lequel chacune de ces lignes perce le cylindre d'extrados dont la section droite a pour trace la courbe $k''e''h''$.

Cette opération déterminera les deux projections de la courbe $keh, k'e'h'$, suivant laquelle l'extrados du berceau est rencontré par la surface normale.

565. Les mêmes opérations donneront les normales génératrices des surfaces de joint, qui ont pour arêtes d'intrados les sections du cylindre par des plans parallèles aux têtes.

On n'a conservé sur l'épure que la surface normale qui aurait pour courbe directrice le quart de cercle $qy, q'y'$.

566. On remarquera que toutes les surfaces normales ont la même projection sur la fig. 10, de sorte que les projections de ces mêmes surfaces sur les fig. 5 et 2 peuvent se construire

en même temps. Ainsi la normale 5 de la courbe *qy* se déduira de la normale 5 de l'hélice 3—7.

La normale au point 3 de l'hélice 3—7 et la normale au point 3 de la courbe *qy*, seront déterminées par la même opération.

567. **Poussée au vide.** — Si l'on compare la surface normale projetée sur les fig. 1 et 2 avec celle qui a pour directrice la trajectoire orthogonale, que nous avons déterminé sur la fig. 5 de la planche 66, on voit que cette dernière est bien plus favorable à la stabilité de la voûte, parce qu'elle diffère très-peu du cylindre projetant, qui est la seule surface de joint qui puisse complétement faire disparaître la poussée au vide (512).

568. On remarquera encore (*fig.* 3) que la surface normale que nous étudions dans ce moment, se rapproche beaucoup du cylindre projetant de l'hélice 3—5, dans la partie de la voûte qui est au-dessus du plan de naissance des deux berceaux projetés sur la fig. 3.

D'où il résulte que la poussée au vide est moins grande dans cette partie de la voûte, qu'à l'endroit où la surface normale vient couper le plan horizontal qui contient l'axe du cylindre.

C'est pourquoi les praticiens préfèrent employer des voûtes surbaissées, ayant pour courbes directrices des arcs de cercle (*fig.* 3), au lieu de berceaux dont l'intrados serait formé par des demi-cylindres (*fig.* 2).

569. **Voussoirs des têtes.** — Dans tout ce qui précède, nous n'avons parlé que de l'appareil hélicoïdal de la voûte et

nous n'avons rien dit des voussoirs en pierres de taille, qui forment les têtes des berceaux. Or la taille de ces pierres sera un peu moins simple que celle qui appartient à l'appareil orthogonal, parce que dans cette espèce de voûtes, les joints des voussoirs pouvaient être formés par des plans perpendiculaires aux arcs des têtes, et formant en quelque sorte les prolongements des cylindres projetant des trajectoires; mais dans l'appareil hélicoïdal, ce n'est plus tout à fait ainsi.

En effet, les hélices qui forment les arêtes d'intrados ne rencontrent plus les arcs de têtes suivant des angles droits, et si les surfaces normales étaient prolongées jusqu'au plan de têtes, la ligne de joint qui résulterait de la rencontre de ces deux surfaces serait nécessairement courbe.

Malgré cela, et par suite du peu de courbure de ces lignes dans les grands ponts, on peut les remplacer par des droites perpendiculaires à l'arc de tête et considérant également comme droite la petite portion d'hélice comprise entre la tête de la pierre et le plan vertical qui la termine du côté de la voûte, chaque plan de joint d'un voussoir de tête sera complétement déterminé.

Ainsi, pour la pierre qui est projetée par A et A′ sur les fig. 12 et 13, l'un des plans de joint contiendra la droite 1—2, normale à l'arc de tête (*fig.* 12) et la corde 1—3 (*fig.* 13), et le second joint sera déterminé par la normale 5—6 (*fig.* 2) et par la corde 5—7 (*fig.* 13).

570. **Taille des voussoirs des têtes.** — La taille de cette pierre ne présente aucune difficulté. En effet, après avoir dressé les deux plans verticaux 1—6 et 3—8 (*fig.* 13), on tracera le panneau 1—2—5—6 dans le plan 1—6 et le panneau 3—4—7—8 dans le plan 3—8.

Les panneaux de joint rabattus en B et C compléteront le tracé de toutes les coupes.

La douelle se taillera comme on le voit sur la fig. 16 en faisant glisser une règle dont la position horizontale sera déterminée par les points de repère, marqués sur les côtés du quadrilatère gauche, 1—5—7—3.

On pourra déterminer ces points en traçant quelques génératrices du cylindre, sur les projections (*fig.* 12 et 13); mais on peut presque toujours éviter cette opération dans les constructions des grandes voûtes, où le gauche, très-peu sensible, est suffisamment déterminé par le contour de la douelle.

571. On pourra éviter la poussée au vide pour les voussoirs des têtes, en prenant pour joints (*fig.* 17) les surfaces projetantes de la droite 1—2, et de l'arc d'hélice 1—3; ou bien (*fig.* 18), les plans projetants des deux droites 1—2 et 1—3, lorsque la courbure de l'arc d'hélice sera insensible.

XI.

572. **Conclusion.** — En résumant je dis: 1° que le système de joints formés par des plans parallèles aux têtes et par les cylindres projetants des trajectoires, est *le seul qui détruise complétement la poussée au vide;*

2° Que l'on ne pourra diminuer cette poussée qu'en se rapprochant le plus possible du système précédent;

3° Que l'appareil orthogonal imaginé par M. Lefort, est celui qui s'en rapproche le plus, en théorie, et qui, par cette raison, paraît le mieux atteindre le but; mais que la varia-

tion d'épaisseur des moellons d'une même assise augmente considérablement la dépense et les difficultés d'une bonne exécution, d'où résulte par conséquent moins de solidité dans la voûte;

4° Enfin, que l'appareil hélicoïdal, quoique moins convenable sous le rapport de la théorie en ce que la poussée au vide est plus grande que par l'appareil orthogonal, convient cependant mieux dans la pratique; d'abord parce qu'il coûte moins cher, mais surtout parce que la facilité de la taille et de la pose permet de mieux lier et enchevêtrer toutes les parties de la voûte, qui alors peut être considérée comme ne formant qu'une seule pièce.

573. Au surplus, ces divers appareils ont tous l'inconvénient d'introduire un grand nombre d'angles aigus, et cette difficulté ne peut être évitée que par la construction d'une suite d'arcs droits en retraite, comme les fermes d'un pont biais en charpente ou en fonte.

Cette méthode a été appliquée avec succès dans l'exécution d'un pont biais, construit à Chartres par M. l'ingénieur Boucher.

Ce pont est composé de six arcs droits en retraite, disposés comme on le voit sur la figure 4, qui est la section horizontale de l'une des piles à la hauteur des naissances.

On trouvera de plus grands détails à ce sujet dans les *Annales des ponts et chaussées* (mars et avril 1848). Cette solution est évidemment la seule qui satisfasse à toutes les conditions du problème, puisqu'elle évite entièrement *la poussée au vide et les angles aigus*. On ne peut lui reprocher que la dépense assez forte qui en résulterait pour un grand

pont, par suite du prix élevé de la pierre de taille et de l'étendue des surfaces à tailler pour former les parements plans et cylindriques des arcs.

Mais la dépense se réduirait beaucoup en faisant usage de petits matériaux, comme cela paraît avoir parfaitement réussi dans la construction d'un pont biais à 52 degrés, que la ville d'Amiens a fait démolir en 1845, et qui était construit depuis plusieurs siècles au moyen *d'arcs parallèles, accolés, formant ainsi redans les uns sur les autres*. Cet ouvrage, exécuté en grès piqué de petit appareil, était dans un état parfait de conservation.

Cet exemple, cité par M. Boucher à la page 243 de son mémoire, m'était entièrement inconnu lorsque j'ai indiqué le même principe (*Pl.* 67, *fig.* 26) dans la deuxième édition de l'ouvrage actuel.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

INTRODUCTION.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

			Pages.
CHAP.	Ier.	Le point, la ligne droite et le plan.	1
	II.	Surfaces des corps et courbes de section. .	29
	III.	Courbes planes.	37
	IV.	Courbes à double courbure.	50
	V.	Dispositions des épures.	63
	VI.	Pénétrations des surfaces.	73

LIVRE PREMIER.

SURFACES PLANES.

CHAP.	Ier.	Murs.	89
	II.	Plates-bandes, voûtes plates.	98

LIVRE DEUXIÈME.

SURFACES CYLINDRIQUES.

CHAP.	Ier.	Murs et berceaux.	105
	II.	Portes diverses.	113
	III.	Voûtes d'arêtes.	124
	IV.	Lunettes.	140
	V.	Descente.	147
	VI.	Questions diverses.	175
	VII.	Trompes cylindriques.	178
	VIII.	Considérations générales.	184

LIVRE TROISIÈME.

SURFACES CONIQUES.

CHAP.	Ier.	Murs et voûtes.	195
	II.	Portes dans un mur conique.	201
	III.	Portes et lunettes coniques.	205
	IV.	Trompes coniques.	216
	V.	Arrière-voussures.	234

LIVRE QUATRIÈME.

SURFACES SPHÉRIQUES.

Pages.

CHAP. Ier. Voûtes sphériques. 241
II. Pendentifs. 252
III. Pénétrations dans la sphère. 257

LIVRE CINQUIÈME.

SURFACES DE RÉVOLUTION.

CHAP. Ier. Voûte dont l'intrados est une surface de révolution. 265
II. Descente. 268
III. Voûte elliptique. 277

LIVRE SIXIÈME.

SURFACES RÉGLÉES.

CHAP. Ier. Joints de la voûte elliptique. 283
II. Conoïdes. 289
III. Escaliers. 300
IV. Limons. 315
V. Voûtes d'escalier. 326

LIVRE SEPTIÈME.

CHAP. Ier. Questions diverses. 349
II. Lignes de courbure. 364
III. Ponts biais. 372

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

PARIS. — IMPRIMÉ PAR E. THUNOT ET Cie,
Rue Racine, 26, près de l'Odéon.

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY
REFERENCE DEPARTMENT

This book is under no circumstances to be taken from the Building

Form 410